@'

LECŢII DE ANALIZĂ FUNCŢIONALĂ CU APLICAŢII ÎN TEORIA MATEMATICĂ A SISTEMELOR

Coordonator Mircea Olteanu
Gavriil Păltineanu, Gigel Paraschiv
Antonela Toma, Marcel Roman
Gabriela Grosu, Luminiţa Costache

Cuprins

1 Spaţii Banach şi spaţii Hilbert **1**
- 1.1 Spaţii Banach 1
- 1.2 Spaţii Hilbert 7

2 Operatori pe spaţii finit dimensionale **21**
- 2.1 Noţiuni de algebră liniară 21
- 2.2 Norma unui operator; continuitate 27
- 2.3 Diagonalizarea operatorilor normali 29

3 Teoreme fundamentale **47**
- 3.1 Operatori pe spaţii normate 47
- 3.2 Teorema Hahn-Banach 54
- 3.3 Principiul mărginirii uniforme 62
- 3.4 Teorema aplicaţiei deschise 65
- 3.5 Teorema lui Alaoglu 68

4 Algebre Banach **73**
- 4.1 Rezultate generale 73
- 4.2 Algebre Banach comutative 83
- 4.3 $C^\star$-algebre comutative 94

5 Operatori pe spaţii Hilbert **101**
- 5.1 Adjunctul unui operator 101
- 5.2 Proiectori 106
- 5.3 Exemple de operatori pe spaţii Hilbert 110
- 5.4 Operatori normali 134

6 Aplicaţii în teoria sistemelor **147**
- 6.1 Cauzalitate şi invarianţă în timp 148
- 6.2 Spaţiul stărilor 155

Introducere

Conţinutul lucrării a fost determinat atât de cerinţele programei de analiză funcţională cât şi de cunoştinţele acumulate de studenţi în primii doi ani la cursurile de matematică. Din această cauză, principalele referinţe bibliografice sunt manuale universitare utilizate de studenţii facultăţilor cu profil tehnic. Primul capitol are un caracter recapitulativ, el conţinând rezultate generale despre spaţii Banach şi Hilbert; o atenţie specială a fost acordată unor exemple care vor fi citate frecvent în restul lucrării. În capitolul al doilea, după o scurtă revedere a unor noţiuni de algebră liniară, este prezentată teoria spectrală a operatorilor normali pe spaţii finit dimensionale. Teoremele de bază ale analizei funcţionale: teorema Hahn-Banach, princi- piul mărginirii uniforme, teorema aplicaţiei deschise, teorema graficului închis şi teorema lui Alaoglu constituie subiectul capitolului 3. În capitolul 4 sunt prezentate rezultate din teoria algebrelor Banach, inclusiv teoria lui Gelfand asupra algebrelor comutative. Capitolul 5 conţine rezultate de bază din teoria operatorilor liniari şi continui pe spaţii Hilbert infinit dimensionale. Sunt studiate câteva clase importante de operatori: translaţii, operatori de multiplicare, operatori integrali şi de convoluţie. Teoria spectrală a operatorilor normali şi unele aplicaţii (ca de exemplu calculul funcţional) sunt abordate în finalul acestui capitol. Ultimul capitol are un caracter aplicativ; aici sunt prezentate modele matematice pentru noţiuni importante din teoria sistemelor, ca de exemplu cauzalitate, invarianţă în timp, spaţiul stărilor.

Capitolul 1

Spaţii Banach şi spaţii Hilbert

1.1 Spaţii Banach

În acest paragraf vom prezenta noţiuni şi rezultate generale din teoria spaţiilor normate. Vom presupune cunoscute conceptele uzuale din teoria spaţiilor vectoriale şi a spaţiilor metrice, aşa cum sunt prezentate în [1] şi [8]. O atenţie specială o vom acorda unor exemple de spaţii Banach ce vor fi folosite frecvent în restul lucrării. Rezultate mai avansate din teoria spaţiilor Banach vor fi date în capitolul 3.

1.Definiţie
Fie X un spaţiu vectorial complex.
O aplicaţie $\| \|: X \longrightarrow [0\,,\,\infty)$ cu proprietăţile:
(a) $\| x+y \| \leq \| x \| + \| y \|$
(b) $\| \alpha x \| = |\alpha| \ \| x \|$
(c) $\| x \| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$,
pentru orice x , $y \in X$ şi $\alpha \in C$, se numeşte **normă**. O aplicaţie care verifică doar condiţiile **(a)** şi **(b)** se numeşte **seminormă**.
Perechea $(X\,,\| \|)$ se numeşte **spaţiu normat**. Orice spaţiu normat este şi spaţiu metric, distanţa dintre x şi y fiind, prin definiţie,
$d(x,y) = \| x-y \|$. Dacă în plus orice şir Cauchy este convergent, atunci $(X\,,\| \|)$ se numeşte **spaţiu Banach** (sau spaţiu normat complet). Se poate demonstra uşor că operaţiile algebrice sunt continue: dacă $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, atunci $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$ şi analog pentru înmulţirea cu scalari. Dacă X este un spaţiu vectorial şi $\| \|_1$,$\| \|_2$ sunt două norme pe X, atunci ele se numesc **echivalente** dacă există c şi k două constante pozitive astfel încât $\| x \|_1 \leq c \| x \|_2 \leq k \| x \|_1$; în acest caz $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ în $\| \|_1 \Longleftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ în $\| \|_2$, deci structurile topologice coincid.

Fie X şi Y două spaţii vectoriale; o aplicaţie $T : X \to Y$ se numeşte **aplicaţie liniară** (sau **operator liniar**) dacă:

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty, \ \forall x, y \in X, \ \forall \alpha, \beta \in C.$$

Spaţiile vectoriale X şi Y se numesc **izomorfe** dacă există $T : X \to Y$ o aplicaţie liniară şi bijectivă. În acest caz, T se numeşte **izomorfism de spaţii vectoriale**. Este simplu de demonstrat că inversul unui izomorfism de spaţii vectoriale este de asemenea operator liniar.
Două spaţii normate $(X, \| \|_1)$ şi $(Y, \| \|_2)$ se numesc **spaţii normate izomorfe** dacă există între ele un izomorfism F de spaţii vectoriale cu proprietatea $\| F(x) \|_2 = \| x \|_1$; în acest caz, F se numeşte **izomorfism de spaţii normate**. Dacă aplicaţia liniară F verifică egalitatea $\| F(x) \|_2 = \| x \|_1$, (fără a fi neapărat bijectivă), atunci F se numeşte **izometrie liniară**.
O noţiune importantă care se poate defini într-un spaţiu normat este cea de **serie convergentă**.

2.Definiţie
Fie $(X, \| \|)$ un spaţiu normat şi fie $(x_n)_{n\in N}$ un şir de elemente din X. Spunem că **seria** $\sum\limits_{n\in N} x_n$ este **convergentă la** $x \in X$ (numit în acest caz **suma seriei**) dacă **şirul sumelor parţiale**, $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ converge la x. Seria $\sum\limits_{n\in N} x_n$ se numeşte **absolut convergentă** dacă seria (de numere reale şi pozitive) $\sum\limits_{n\in N} \| x_n \|$ este convergentă. Cu o demonstraţie asemănătoare celei de la serii de numere reale se poate arăta că într-un spaţiu Banach orice serie absolut convergentă este convergentă, reci proca fiind, în general, falsă. Este interesant faptul că această proprietate caracterizează spaţiile normate complete.

3.Propoziţie
Un spaţiu normat $(X, \| \|)$ este complet dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_n \subset X$ cu proprietatea că seria $\sum\limits_{n\in N} \| x_n \|$ este convergentă, rezultă că seria $\sum\limits_{n\in N} x_n$ este convergentă.
Demonstraţie. Să presupunem că $(X, \| \|)$ este un spaţiu normat în care este verificată ipoteza din enunţ şi fie $(x_n)_n \subset X$ un şir Cauchy. Fie $k \in N$ şi fie $n_k \in N$ astfel încât pentru orice $i, j \geq n_k$ să avem $\| x_i - x_j \| < 2^{-k}$. Dacă definim $y_1 = x_1$ şi $y_k = x_{n_k} - x_{n_{k-1}}$, pentru orice $k \in N$ şi $k \geq 2$, atunci seria $\sum\limits_{k\in N} \| y_k \|$ este convergentă. Din ipoteză rezultă că seria $\sum\limits_{k\in N} y_k$ este convergentă şi deci şirul $(x_{n_k})_{k\in N}$ converge la un element $x \in X$. Este uşor de arătat că şirul $(x_n)_n$ converge la x. Cealaltă implicaţie o lăsăm ca exerciţiu.

Încheiem acest paragraf cu o listă de spaţii Banach ce vor fi citate frecvent în continuare.

4.Exemple

(i) Fie $n \in N$ fixat şi fie

$$C^n = \{x = (x_1, x_2, .., x_n)\,;\, x_j \in C,\, \forall j = 1, 2, .., n\}$$

cu structura uzuală de spaţiu vectorial. Cu **norma euclidiană**:

$$\| x \|_2 = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2},$$

C^n este spaţiu Banach, ([8],p.64); propunem cititorului ca exerciţiu afirmaţia că următoarele două norme sunt echivalente cu norma euclidiană:

$$\| x \|_1 = \sum_{j=1}^{n} |x_j|,$$

$$\| x \|_\infty = \max\{|x_j|\,,\, 1 \leq j \leq n\}.$$

Cu aceleaşi norme, şi R^n este spaţiu Banach.

(ii) Spaţiile $\ell^p(Z)$ şi $\ell^p(N)$

Fie $p \in R$, $p \geq 1$, fixat şi fie

$$\ell^p(Z) = \{x : Z \to C\,;\, \sum_{n\in Z} |x(n)|^p \text{ este convergentă}\}.$$

Facem precizarea că dacă $(a_n)_{n\in Z}$ este un şir de numere complexe indexat după Z, atunci seria $\sum\limits_{n\in Z} a_n$ este convergentă dacă seriile $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} a_n$ şi $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ sunt amândouă convergente.

Este evident că pentru orice $\alpha \in C$ şi $x \in \ell^p(Z)$, şirul $(\alpha x)(n) = \alpha x(n)$ este în $\ell^p(Z)$. Fie acum $x, y \in \ell^p(Z)$ şi fie $(x + y)(n) = x(n) + y(n)$. Notând

$$\| x \|_p = \left(\sum_{n\in Z} |x(n)|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

atunci, din inegalitatea lui Minkovski, ([8],p.259), rezultă inegalitatea $\| x + y \|_p \leq \| x \|_p + \| y \|_p$; celelalte proprietăţi din definiţia spaţiului normat sunt evidente. Demonstrăm în continuare completitudinea. Dacă $(x^k)_{k\in N}$ este un şir Cauchy în $\ell^p(Z)$ şi dacă $\epsilon > 0$, atunci

există $k_\epsilon \in N$ astfel încât $\| x^k - x^j \|_p < \epsilon$, $\forall k, j \geq k_\epsilon$. De aici rezultă:

$$\sum_{n \in Z} |x^k(n) - x^j(n)|^p < \epsilon^p \, , \forall k, j \geq k_\epsilon, \tag{1.1}$$

şi deci pentru orice $n \in N$, avem $|x^k(n) - x^j(n)| < \epsilon, \forall k, j \geq k_\epsilon$, ceea ce arată că şirul $(x^k(n))_{k\in N}$ este şir Cauchy (de numere complexe) pentru orice $n \in N$, deci este convergent; fie $x(n) = \lim\limits_{k\to\infty} x^k(n)$. Din relaţia (1.1), pentru $j \to \infty$, rezultă $\sum\limits_{n\in Z} |x^k(n) - x(n)|^p \leq \epsilon^p, \forall k \geq k_\epsilon$, adică $x^k - x \in \ell^p(Z)$, $\forall k \geq k_\epsilon$. De aici rezultă că $x \in \ell^p(Z)$ şi $\| x^k - x \|_p \leq \epsilon, \forall k \geq k_\epsilon$, ceea ce încheie demonstraţia.
Analog se definesc spaţiile $\ell^p(N) = \{x : N \to C \, ; \, \sum\limits_{n=0}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$.

(iii) Spaţiul $\ell^\infty(Z)$
Fie $\ell^\infty(Z) = \{x : Z \to C \, ; \, x$ şir mărginit $\}$. Cu operaţiile uzuale, definite în exemplul anterior, $\ell^\infty(Z)$ este spaţiu vectorial. Este uşor de arătat că aplicaţia $\| x \|_\infty = \sup\limits_{n\in Z} |x(n)|$ este normă. Pentru a demonstra completitudinea, să considerăm $(x^k)_{k\in N}$ un şir Cauchy în $\ell^\infty(Z)$ şi $\epsilon > 0$. Atunci există $k_\epsilon \in N$ asfel încât $\| x^k - x^j \|_\infty < \epsilon \, , \forall k, j \geq k_\epsilon$, şi deci şirul $(x^k(n))_{k\in N}$ este şir Cauchy (de numere complexe) pentru orice $n \in Z$. Există deci $x(n) = \lim\limits_{k\to\infty} x^k(n)$. Şirul x astfel construit este în $\ell^\infty(Z)$ şi este limita (în $\ell^\infty(Z)$) a lui $(x^k)_{k\in N}$:

$$\| x^k - x \|_\infty = \sup_{n\in Z} \lim_{j\to\infty} |x^k(n) - x^j(n)| \leq \epsilon.$$

Analog se defineşte spaţiul $\ell^\infty(N)$.

(iv) Spaţiile $L^p(\Omega, \mu)$
Prezentăm în continuare spaţiile de funcţii măsurabile. Vom presupune cunoscute construcţiile şi rezultatele de bază din teoria măsurii şi integralei (aşa cum sunt prezentate, de exemplu, în [8],[19],[13]).
Fie $\Omega \neq \emptyset$, fie $\aleph$ o σ-algebră de părţi ale lui Ω şi fie $\mu : \aleph \to [0\, , \infty]$ o măsură pozitivă. Fie $p \in R \, , p \geq 1$, fixat. Pentru orice funcţie măsurabilă $f : \Omega \to C$, definim

$$\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Mulţimea

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to C \, ; \, f \text{ măsurabilă şi } \| f \|_p < \infty\}$$

este spaţiu vectorial cu operaţiile uzuale pentru funcţii, iar $\| \|_p$ este o seminormă pe $\mathcal{L}^p(\Omega, \mu)$. Identificând funcţiile egale a.p.t. (în raport cu măsura μ) şi notând cu $L^p(\Omega, \mu)$ mulţimea claselor de echivalenţă astfel obţinute, se demonstrează că ($L^p(\Omega, \mu)$, $\| \|_p$) este spaţiu Banach,([8],p.260). Funcţiile din $L^1(\Omega, \mu)$ se numesc **integrabile** (în raport cu măsura μ), iar cele din $L^p(\Omega, \mu)$ se numesc p-**integrabile**.
Indicăm în continuare câteva cazuri particulare remarcabile.
Dacă $\Omega = Z$ şi μ este măsura de numărare, atunci se obţin spaţiile $\ell^p(Z)$ din exemplul **(ii)**.
Spaţiile de funcţii p-integrabile pe R în raport cu măsura Lebesgue vor fi notate mai simplu cu $L^p(R)$.
Alt caz important se obţine considerând $\Omega = \mathcal{S}^1 = \{\lambda \in C\,,\, |\lambda| = 1\}$ şi μ măsura Lebesgue pe cercul unitate (normalizată, adică $\mu(\mathcal{S}^1) = 1$); şi în acest caz vom nota spaţiile de funcţii p-integrabile cu $L^p(\mathcal{S}^1)$.
Un rezultat remarcabil referitor la funcţii p-integrabile este

Inegalitatea lui Hölder

Fie $p > 1$ şi $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Atunci, pentru orice funcţii $f \in L^p(\Omega, \mu)$ şi $g \in L^q(\Omega, \mu)$, avem:

$$\| fg \|_1 \leq \| f \|_p \| g \|_q .$$

În general, pentru Ω arbitrar, dacă $1 \leq p_1 \leq p_2$, nu există o relaţie de incluziune între spaţiile $L^{p_1}(\Omega, \mu)$ şi $L^{p_2}(\Omega, \mu)$. Totuşi, în cazurile particulare $\Omega = Z$ şi $\Omega = \mathcal{S}^1$, au loc următoarele incluziuni ([19],p.209):

$$\ell^{p_1}(Z) \subseteq \ell^{p_2}(Z),\ \forall\ 1 \leq p_1 \leq p_2;$$

$$L^{p_2}(\mathcal{S}^1) \subseteq L^{p_1}(\mathcal{S}^1),\ \forall\ 1 \leq p_1 \leq p_2.$$

În particular, au loc incluziunile:

$$\ell^1(Z) \subset \ell^2(Z) \text{ şi } L^2(\mathcal{S}^1) \subset L^1(\mathcal{S}^1).$$

Ultimele două incluziuni rezultă direct din inegalităţile:

$$\| x \|_1^2 = \left(\sum_{n \in Z} |x(n)| \right) \left(\sum_{m \in Z} |x(m)| \right) \geq \sum_{n \in Z} |x(n)|^2 = \| x \|_2^2,\ \forall x \in \ell^1(Z),$$

$$\| f \|_1^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(e^{it})| \cdot 1 dt \leq \| f \|_2^2,\ \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Pentru ultima inegalitate am folosit inegalitatea lui Holder pentru $p = q = 2$ şi faptul că funcţia constantă $\mathbf{1}$ este în $L^2(\mathcal{S}^1)$.
Să reţinem deci că:

$$\text{Dacă } x \in \ell^2(Z) \text{ avem } \| x \|_2 \leq \| x \|_1 .$$

$$\text{Dacă } f \in L^2(\mathcal{S}^1) \text{ avem } \parallel f \parallel_1 \leq \parallel f \parallel_2 .$$

Menţionăm că în cazul $\Omega = R$, nu există o relaţie de incluziune între $L^1(R)$ şi $L^2(R)$.

Teoremele de densitate joacă un rol important în studiul spaţiilor $L^p(\Omega, \mu)$. Amintim două rezultate în acest sens.

Teoremă
Mulţimea $L^1(\Omega, \mu) \bigcap L^2(\Omega, \mu)$ este densă în $L^2(\Omega, \mu)$.
În particular, de aici rezultă că $\ell^1(Z)$ este dens în $\ell^2(Z)$.

Al doilea rezultat se referă la funcţii continue.
Să presupunem că pe mulţimea Ω s-a definit şi o structură de spaţiu metric (mai general, este suficient ca pe Ω să fie definită o topologie local compactă; pentru noţiuni de topologie generală, recomandăm [3],p.77), iar măsura μ este o măsură boreliană regulată (măsura Lebesgue, atât pe R, cât şi pe $\mathcal{S}^1$ are aceste proprietăţi). În acest caz, avem:

Teoremă
Mulţimea funcţiilor continue cu suport compact definite pe Ω cu valori complexe este densă (în sensul normei $\parallel \parallel_p$) în spaţiul $L^p(\Omega, \mu)$; bibliografie: [13],pag.68; [8],p.262; [19],p.211.

(v) Spaţiul $\mathcal{C}(\mathcal{D})$
Fie $\mathcal{D}$ un spaţiu metric compact (mai general, este suficient ca $\mathcal{D}$ să fie un spaţiu topologic compact: a se vedea [3],p.92) şi fie

$$\mathcal{C}(\mathcal{D}) = \{f : \mathcal{D} \to C \, ; \, f \text{ continuă}\}.$$

Cu operaţiile uzuale, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ este spaţiu vectorial. Structura de spaţiu Banach este definită de **norma supremum**:

$$\parallel f \parallel_\infty = \sup_{t \in \mathcal{D}} |f(t)|.$$

Pentru demonstraţii, recomandăm [3],p.189; [8],p.89; [5],p.10.

(vi) Spaţiul $L^\infty(\Omega, \mu)$
Fie (Ω, μ) ca mai sus. Pentru orice funcţie măsurabilă $f : \Omega \to [0, \infty)$, considerăm mulţimea $A(f) = \{t \in R \, ; \, \mu(f^{-1}(t, \infty)) = 0\}$. Dacă $A(f) = \emptyset$, atunci, prin definiţie, $\text{esssup}(f) = \infty$. Dacă $A(f) \neq \emptyset$, atunci, prin definiţie, $\text{esssup}(f) =$

$\inf A(f)$. Numărul (eventual ∞) $\text{esssup}(f)$ se numeşte **marginea superioară esenţială** (sau **supremumul esenţial**)
a funcţiei f. Pentru o funcţie măsurabilă arbitrară, $f : \Omega \to C$ definim

$$\| f \|_\infty = \text{esssup}(|f|).$$

Mulţimea $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mu) = \{f : \Omega \to C \,;\, \| f \|_\infty < \infty\}$ este spaţiu vectorial împreună cu operaţiile uzuale, iar aplicaţia $\| \, \|_\infty$ este o seminormă. Identificând funcţiile egale a.p.t. (în raport cu măsura μ), obţinem **spaţiul Banach al funcţiilor esenţial mărginite**, pe care îl vom nota $L^\infty(\Omega, \mu)$; bibliografie: [8],p.261; [19],p.205; [13],p.60. Din definiţie, rezultă următoarele două implicaţii:
(a) Dacă $|f| \leq m$ a.p.t., atunci, $\| f \|_\infty \leq m$.
(b) Pentru orice $\epsilon > 0$, există o mulţime măsurabilă $A \subseteq \Omega$ astfel încât $\mu(A) > 0$ şi $|f(t)| > \| f \|_\infty - \epsilon$, $\forall t \in A$.
De fapt, conceptul de funcţie esenţial mărginită, este o generalizare a noţiunii uzuale de funcţie mărginită, "modulo mulţimi de măsură nulă": o funcţie măsurabilă f este esenţial mărginită dacă şi numai dacă există o mulţime măsurabilă $A \subseteq \Omega$ astfel încât $\mu(\Omega - A) = 0$ şi restricţia lui f la mulţimea A să fie funcţie mărginită.
Evident că orice funcţie mărginită este esenţial mărginită. Dacă Ω este un spaţiu topologic compact, iar μ este o măsură boreliană pe Ω atunci orice funcţie continuă este mărginită şi deci şi esenţial mărginită: $\mathcal{C}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega, \mu)$. În acest caz, supremumul esenţial al unei funcţii continue coincide cu supremumul funcţiei.
Indicăm în continuare câteva cazuri particulare. Spaţiul Banach al şirurilor mărginite, $\ell^\infty(Z)$ se obţine pentru $\Omega = Z$ şi μ măsura de numărare. $L^\infty(R)$ va fi spaţiul Banach al funcţiilor esenţial mărginite pe R în raport cu măsura Lebesgue, iar $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ spaţiul Banach al funcţiilor esenţial mărginite pe cercul unitate în raport cu măsura Lebesgue (pe cerc).

1.2 Spaţii Hilbert

Pricipalul concept geometric ce nu poate fi definit satisfăcător într-un spaţiu Banach este perpendicularitatea. Noţiunea de produs scalar, (pe care-l introducem în continuare) este instrumentul care permite construirea unei teorii geometrice apropiate de cea euclidiană în cadrul abstract al spaţiilor vectoriale. În acest paragraf prezentăm noţiunile şi rezultatele de bază din teoria spaţiilor Hilbert. Deoarece unele dintre acestea vor fi date fără demonstraţii, recomandăm următoarele surse bibliografice pentru completarea informaţiei:

[1], [8], [4], [5], [6].

5.Definiţie

Fie X un spaţiu vectorial complex; se numeşte **produs scalar pe** X orice aplicaţie $<,>$: $X \times X \to C$ care, pentru orice $x, y, z \in X$ şi $\alpha, \beta \in C$, verifică proprietăţile:

(a) $< \alpha x + \beta y , z >= \alpha < x, z > +\beta < y, z >$

(b) $< x, y >= \overline{< y, x >}$

(c) $< x, x > \geq 0$

(d) $< x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Perechea $(X, <,>)$ se numeşte **spaţiu cu produs scalar** (sau **spaţiu prehilbertian**).

6.Observaţie

Fie $(H, <,>)$ un spaţiu cu produs scalar. Atunci, pentru orice vectori $x, y \in H$, avem:

(a) relaţia de polarizare:

$$< x, y >=$$
$$= \frac{1}{4}(< x + y, x + y > - < x - y, x - y > +$$
$$+i < x + iy, x + iy > -i < x - iy, x - iy >).$$

(b) inegalitatea lui Schwarz:

$$| < x, y > | \leq \sqrt{< x, x >< y, y >}.$$

(c) Aplicaţia $\| \|$: $H \to [0, \infty)$, $\| x \|= \sqrt{< x, x >}$ este o normă pe H; o vom numi **norma definită de produsul scalar**.

(d) Produsul scalar este aplicaţie continuă: dacă $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ şi $\lim_{n\to\infty} y_n = y$, atunci $\lim_{n\to\infty} < x_n, y_n >=< x, y >$.

Demonstraţiile se pot găsi în: [1],p.334; [8],p.317; [4],p.147; [5],pag.64.

7.Definiţie

Fie $(H, <,>)$ un spaţiu prehilbertian şi fie $\| \|$ norma indusă de produsul scalar. Dacă $(H, \| \|)$ este complet atunci $(H, <,>)$ se numeşte **spaţiu Hilbert**. Doi vectori $x, y \in H$ se numesc **ortogonali** (sau **perpendiculari**) dacă $< x, y >= 0$. Vectorul x se numeşte **ortogonal pe submulţimea** nevidă $M \subseteq H$ (şi vom nota $x \perp M$) dacă x este ortogonal pe toţi vectorii din M. **Ortogonalul mulţimii** M este, prin definiţie, $M^{\perp} = \{y \in H ; y \perp x, \forall x \in M\}$. Este simplu de arătat că $M^{\perp}$ este subspaţiu vectorial închis în H (se foloseşte continuitatea produsului scalar). Propunem de asemenea ca

exerciţiu egalitatea (aici bara înseamnă închiderea mulţimii respective): $\left(K^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{K}$, pentru orice subspaţiu $K \subseteq H$. Dacă $M \neq \{0\}$, atunci $M^{\perp} \neq H$. Submulţimea nevidă $M \subseteq H$ se numeşte **ortogonală** dacă $x \perp y$, $\forall x, y \in M$ şi **ortonormală** dacă, în plus, $\| x \| = 1$, $\forall x \in M$.
Două spaţii Hilbert $(H_1, <\,,\,>_1)$ şi $(H_2, <\,,\,>_2)$ se numesc **izomorfe** dacă există un izomorfism U de spaţii vectoriale de la H_1 la H_2 astfel încât $< Ux, Uy >_2 = < x, y >_1$. Aplicaţia U se numeşte în acest caz **izomorfism de spaţii Hilbert** sau **operator unitar**.
Următoarele două proprietăţi sunt generalizări ale unor rezultate din geometria elementară.

8.Propoziţie
(a) Fie $(H, <\,,\,>)$ un spaţiu prehilbertian. Atunci:

$$\| x + y \|^2 + \| x - y \|^2 = 2(\| x \|^2 + \| y \|^2), \forall x, y \in H.$$

(b) Reciproc, dacă $(X, \| \, \|)$ este un spaţiu normat astfel încât este verificată egalitatea de la punctul **(a)**, atunci există un produs scalar $<\,,\,>$ pe X astfel încât $\| x \|^2 = < x, x >$; (**legea paralelogramului**).
(c) Pentru orice mulţime finită ortogonală de vectori $\{x_1, x_2, .., x_n\}$ din spaţiul prehilbertian H, are loc egalitatea (**teorema lui Pitagora**):

$$\| \sum_{j=1}^{n} x_j \|^2 = \sum_{j=1}^{n} \| x_j \|^2 .$$

Pentru demonstraţii se pot consulta [1],p.118; [8],p.317; [4],p.148.

Următorul rezultat este fundamental în studiul spaţiilor Hilbert. Reamintim că o submulţime M a unui spaţiu vectorial se numeşte **convexă** dacă $\alpha x + (1 - \alpha) y \in M$, $\forall x, y \in M$, $\forall \alpha \in [0, 1]$.

9.Teoremă
Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $M \subseteq H$ o mulţime nevidă, închisă şi convexă. Atunci există şi este unic un vector $x_M \in M$ astfel încât

$$\| x_M \| = \inf\{\| x \| \, ; \, x \in M\}.$$

Demonstraţie Să notăm cu $\delta = \inf\{\| x \| \, ; \, x \in M\}$ şi fie $(x_n)_n$ un şir de elemente din M astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n \| = \delta$. Deoarece M este mulţime convexă, rezultă că pentru orice $n, m \in N$ avem $\frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}x_m \in M$ şi deci:

$$\| \frac{x_n + x_m}{2} \|^2 \geq \delta^2 \,, \forall n, m \in N.$$

Aplicând legea paralelogramului vectorilor $\frac{1}{2}x_n$ şi $\frac{1}{2}x_m$ şi folosind inegalitatea de mai sus, rezultă:

$$\| \frac{x_n - x_m}{2} \|^2 = 2 \| \frac{x_n}{2} \|^2 + 2 \| \frac{x_m}{2} \|^2 - \| \frac{x_n + x_m}{2} \|^2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}(\| x_n \|^2 + \| x_m \|^2) - \delta^2$$

şi deci :

$$\| x_n - x_m \|^2 \leq 2\,(\| x_n \|^2 + \| x_m \|^2) - 4\delta^2.$$

De aici rezultă că $\limsup_{n,m\to\infty} \| x_n - x_m \|^2 = 0$, ceea ce arată că $(x_n)_n$ este şir Cauchy; fie $x_M = \lim_{n\to\infty} x_n$. Deoarece M este mulţime închisă, rezultă că $x_M \in M$, iar din continuitatea normei avem $\| x_M \| = \delta$. Pentru a demonstra unicitatea, presupunem prin absurd că există x_M şi y_M în M, diferiţi, astfel încât $\| x_M \| = \| y_M \| = \delta$. Aplicând legea paralelogramului vectorilor x_M şi y_M şi repetând raţionamentul anterior, rezultă $\| x_M - y_M \| = 0$, ceea ce constituie o contradicţie.

10.Consecinţă (teorema proiecţiei pe un subspaţiu închis)
Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $K \subseteq H$ un subspaţiu închis. Atunci, pentru orice $x \in H$, există şi este unic $y \in K$ astfel încât $x - y \in K^\perp$ şi $\| x - y \| \leq \| x - z \|$, pentru orice $z \in K$. Elementul y (care depinde în mod evident de x şi K) se numeşte **proiecţia lui** x **pe** K. Pentru demonstraţie se aplică teorema precedentă.
Rezultatul următor este o generalizare în spaţii Hilbert a descompunerii unui vector după două direcţii perpendiculare din geometria euclidiană.

11.Teoremă (descompunerea ortogonală)
Fie H un spaţiu Hilbert şi fie K un subspaţiu închis al său. Atunci, pentru orice vector $x \in H$ există $y \in K$ şi $z \in K^\perp$ astfel încât $x = y + z$; în plus, această descompunere este unică. Vom nota această descompunere ortogonală $H = K \bigoplus K^\perp$.
Demonstraţie Fie $x \in H$, arbitrar fixat. Aplicând teorema 9 mulţimii nevide, convexe şi închise $M = \{x - u\,,\, u \in K\}$, rezultă că există un vector unic $z \in M$ cu proprietatea $\| z \| = \inf\{\| v \|\,;\, v \in M\}$. Fie $u \in K$ astfel încât

$\| u \| = 1$; atunci $z - < z, u > u \in M$ şi deci:

$$\| z \|^2 \leq \| z - < z, u > u \|^2 = < z - < z, u > u, z - < z, u > u > =$$

$$= \| z \|^2 - \overline{< z, u >} < z, u > - < z, u > \overline{< z, u >} + | < z, u > |^2 =$$

$$= \| z \|^2 - | < z, u > |^2,$$

ceea ce este posibil numai dacă $< z, u > = 0$. Am demonstrat deci că $z \in K^{\perp}$. Din definiţia lui M rezultă că există $y \in K$ astfel încât $x = y + z$. Pentru a demonstra unicitatea, presupunem prin absurd că există $y_1, y_2 \in K$ şi $z_1, z_2 \in K^{\perp}$ astfel încât $y_1 \neq y_2$, $z_1 \neq z_2$ şi
$x = y_1 + z_1 = y_2 + z_2$. De aici rezultă că $y_1 - y_2 = z_2 - z_1$; dar $y_1 - y_2 \in K$ şi $z_2 - z_1 \in K^{\perp}$, şi deci $y_1 - y_2 = z_2 - z_1 \in K \cap K^{\perp} = \{0\}$, contradicţie care încheie demonstraţia.

12.Definiţie
Fie X un spaţiu normat. Se numeşte **funcţională** pe X orice aplicaţie $f : X \to C$. Aşa cum vom vedea în capitolul 3, funcţionalele liniare şi continue au un rol deosebit în studiul spaţiilor Banach. Pe spaţii Hilbert este adevărat următorul rezultat remarcabil (teorema lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe un spaţiu Hilbert).

13.Teorema lui Riesz
Fie H un spaţiu Hilbert.
(a) Pentru orice $y \in H$, fixat, aplicaţia $f_y : H \to C$, $f_y(x) = < x, y >$ este funcţională liniară şi continuă.
(b) Reciproc, dacă f este o funcţională liniară şi continuă pe H, atunci există şi este unic un vector $y_f \in H$ astfel încât $f(x) = < x, y_f >$,
$\forall x \in H$; în plus, are loc egalitatea (semnificaţia ei va fi dată în lema 5,cap.3):

$$\sup\{|f(x)| \, ; \, x \in H \text{ şi } \| x \| = 1\} = \| y_f \| \, .$$

Demonstraţie Punctul **(a)** este evident (pentru continuitate se foloseşte inegalitatea lui Schwarz).
(b) Fie $\text{Ker}(f) = \{x \in H \mid f(x) = 0\}$ nucleul aplicaţiei f. Dacă $\text{Ker}(f) = H$, atunci f este identic nulă şi deci putem lua $y_f = 0$. Dacă $\text{Ker}(f) \neq H$, atunci există $z \in \text{Ker}(f)^{\perp}$ cu proprietatea $\| z \| = 1$ şi $f(z) \neq 0$. Pentru orice $x \in H$, vectorul $x - (\frac{f(x)}{f(z)})z$ este în $\text{Ker}(f)$, şi deci:

$$f(x) = f(x) < z, z > = < \frac{f(x)}{f(z)} z, \overline{f(z)} z > =$$

$$=< x - \frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}z > + < \frac{f(x)}{f(z)}z, \overline{f(z)}z >=< x, \overline{f(z)}z >,$$

şi deci putem alege $y_f = \overline{f(z)}\ z$. Unicitatea lui y_f este imediată. Din inegalitatea lui Schwarz, rezultă

$$\sup\{|f(x)|;\, x \in H \text{ şi } \| x \|= 1\} = \sup\{\,| < x, y_f > |;\, x \in H \text{şi } \| x \|= 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\| x \|\| y_f \|;\, x \in H \text{ şi } \| x \|= 1\} =\| y_f \| .$$

Pentru a demonstra cealaltă inegalitate, să observăm că:

$$|f\left(\frac{y_f}{\| y_f \|}\right)| =\| y_f \| .$$

În particular, rezultă că supremumul este atins în punctul $\frac{y_f}{\|y_f\|}$.

14.Definiţie
Fie H un spaţiu Hilbert. Se numeşte **bază ortonormală** în H orice submulţime $\mathcal{B} = \{\varepsilon_\imath\}_{\imath \in \mathcal{J}}$ cu proprietăţile:
(i) $< \varepsilon_\imath, \varepsilon_\jmath >= \delta^\imath_\jmath$, $\forall \imath, \jmath \in \mathcal{B}$; (am notat cu $\delta^\imath_\jmath$ simbolul lui Kronecker).
(ii) Subspaţiul vectorial generat de $\mathcal{B}$ este dens în H.
Se demonstrează că în orice spaţiu Hilbert există cel puţin o bază ortonormală, ([4],p.156; [5],p.75,); de asemenea, orice două baze ortonormale ale aceluiaşi spaţiu Hilbert H au acelaşi număr de elemente, numit **dimensiunea** lui H. Spaţiile Hilbert care admit baze ortonormale cel mult numărabile (card $(\mathcal{B}) \leq \aleph_\circ$), se numesc **separabile**. Cum în această lucrare vom considera numai spaţii Hilbert separabile, de aici înainte, prin spaţiu Hilbert vom înţelege un spaţiu Hilbert separabil.
Fie $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ o bază ortonormală fixată şi fie $x \in H$ un vector arbitrar fixat; **coeficienţii Fourier** (în raport cu baza $\mathcal{B}$), ai lui x sunt, prin definiţie, numerele $\hat{x}(n) =< x, \varepsilon_n >$. Vom nota cu $\hat{x} : N \to C$ **şirul coeficienţilor Fourier**. Seria $\sum\limits_{n \in N} \hat{x}(n)\varepsilon_n$ se numeşte **seria Fourier** asociată lui x (în baza $\mathcal{B}$).

15.Teoremă
În ipotezele şi notaţiile de mai sus, seria Fourier converge la x şi are loc (**egalitatea lui Parseval**):

$$\| x \|^2= \sum_{n \in N} |\hat{x}(n)|^2.$$

Demonstraţie Fie u_n şirul sumelor parţiale asociat seriei Fourier; pentru orice $k \in \{1, 2, .., n\}$, avem:

$$< u_n, \varepsilon_k >= \sum_{j=1}^{n} \hat{x}(j) < \varepsilon_j, \varepsilon_k >= \hat{x}(k) =< x, \varepsilon_k >,$$

ceea ce arată că $x - u_n \perp \varepsilon_k$, $\forall k \leq n$. Fie, pentru orice $n \in N$ subspaţiul H_n generat de $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, .., \varepsilon_n\}$; H_n este subspaţiu închis (deoarece este finit dimensional) şi $x - u_n \in H_n^{\perp}$. Fie acum un vector arbitrar $v \in H_n$; conform teoremei lui Pitagora, avem:

$$\| x - v \|^2 = \| x - u_n \|^2 + \| v - u_n \|^2 \geq \| x - u_n \|^2 .$$

De aici rezultă că u_n este proiecţia vectorului x pe subspaţiul H_n, conform consecinţei 10. Fie $\epsilon > 0$; deoarece subspaţiul liniar generat de $\mathcal{B}$ este dens în H, există $n(\epsilon) \in N$ şi un vector $z \in H_{n(\epsilon)}$ astfel încât $\| z - x \| < \epsilon$. Fie $n \geq n(\epsilon)$; aplicând din nou teorema proiecţiei, rezultă (deoarece $z \in H_n$):

$$\| x - u_n \| \leq \| x - z \| < \epsilon,$$

ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = x$.
Pentru a demonstra egalitatea lui Parseval, să observăm că pentru orice $n \in N$, avem:

$$\| u_n \|^2 =< \sum_{j=1}^{n} \hat{x}(j)\varepsilon_j, \sum_{k=1}^{n} \hat{x}(k)\varepsilon_k >=$$

$$= \sum_{j,k=1}^{n} \hat{x}(j)\overline{\hat{x}(k)} < \varepsilon_j, \varepsilon_k >= \sum_{j=1}^{n} |\hat{x}(j)|^2.$$

Pentru $n \to \infty$, se obţine egalitatea lui Parseval.

16.Observaţie

Seria Fourier a vectorului x se mai numeşte şi dezvoltarea (în baza $\mathcal{B}$) a lui x. Se poate demonstra că această dezvoltare este unică, deci dacă seria $\sum\limits_{n\in N} \alpha_n \varepsilon_n$ converge la x, atunci $\alpha_n = \hat{x}(n)$. De asemenea, un calcul direct arată că pentru orice $x, y \in H$ are loc egalitatea: $< x, y >= \sum\limits_{n\in N} \hat{x}(n)\overline{\hat{y}(n)}$.
Încheiem acest capitol cu exemple de spaţii Hilbert şi noţiuni despre transformarea Fourier.

17.Exemple

(i) Spaţiul Banach $(C^n, \| \|_2)$ este spaţiu Hilbert, produsul scalar fiind $< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}$. Baza canonică a spaţiului vectorial C^n este bază ortonormală. Nu este dificil de demonstrat că orice spatiu Hilbert complex (real) de dimensiune n este izomorf cu C^n, (respectiv R^n).

(ii) Spaţiul $\ell^2(Z)$
Folosind legea paralelogramului, se demonstrează că dintre spaţiile Banach $\ell^p(Z)$ (din exemplul 4(ii)) numai $\ell^2(Z)$ este spaţiu Hilbert, produsul scalar fiind

$$< x, y >= \sum_{n \in N} x(n)\overline{y(n)}.$$

Fie, pentru orice $n \in Z$, şirul $\sigma_n : Z \to C$, definit prin:

$$\sigma_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad m = n \\ 0 & \text{dacă} \quad m \neq n \end{cases}$$

Atunci mulţimea $(\sigma_n)_{n \in Z}$ este bază ortonormală (numită baza canonică) în $\ell^2(Z)$. Dacă $x \in \ell^2(Z)$, atunci şirul coeficienţilor săi Fourier este $\hat{x}(n) = x(n)\,, \forall n \in Z$, iar seria sa Fourier este $\sum_{n \in Z} x(n)\sigma_n$. Un subspaţiu închis inclus în $\ell^2(Z)$ este

$$h^2(Z) = \{x \in \ell^2(Z)\,;\, x(n) = 0\,, \forall n < 0\}.$$

Evident că $\ell^2(N)$ se poate identifica cu acest subspaţiu, prelungind şirurile cu 0 pentru $n < 0$. Se poate arăta că orice spaţiu Hilbert (separabil) H este izomorf cu un spaţiu de tip ℓ^2. Într-adevăr, dacă $\mathcal{B} = \{\varepsilon_n\}_{n \in N}$ este o bază ortonormală a lui H, atunci aplicaţia

$$H \ni x \to \hat{x} \in \ell^2(N)$$

este un izomorfism de spaţii Hilbert: [1],pag.337. Pentru un rezultat analog pentru spaţii Hilbert neseparabile se poate consulta [4],p.161.

(iii) Un rezultat similar cu cel din exemplul anterior este adevărat şi pentru spaţiile $L^p(\Omega, \mu)$, (din exemplul 2(iii)): $L^p(\Omega, \mu)$ este spaţiu Hilbert dacă şi numai dacă $p = 2$, produsul scalar fiind definit prin relaţia $< f, g >= \int_\Omega f\, \overline{g}\, d\mu$.

(iv) Încheiem această listă de exemple cu **suma directă a unei familii numărabile de spaţii Hilbert**.

Începem cu cazul finit; fie aşadar $(H_1, < , >_1)$ şi $(H_2, < , >_2)$ două spaţii Hilbert şi fie **suma directă** a lor, definită prin:

$$\bigoplus_{i=1}^{2} H_i = \{(x_1, x_2)\,;\, x_i \in H_i\}.$$

Cu operaţiile $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ şi
$\alpha(x_1, x_2) = (\alpha x_1, \alpha x_2)$, $\forall \alpha \in C$, suma directă este spaţiu vectorial; este uşor de arătat că aplicaţia:

$$< (x_1, x_2), (y_1, y_2) >=< x_1, y_1 >_1 + < x_2, y_2 >_2$$

este produs scalar pe spaţiul sumă directă. Norma corespunzătoare este (notaţiile sunt evidente):

$$\| (x_1, x_2) \|= \sqrt{\| x_1 \|_1^2 + \| x_2 \|_{2^2}}.$$

Se demonstreză că $\bigoplus\limits_{i=1}^{2} H_i$ este şi complet, deci este spaţiu Hilbert.
Definiţia de mai sus se generalizează fără dificultăţi la orice familie finită de spaţii Hilbert. Fie acum $\mathcal{H} = \{H_n, < , >_n\}_{n\in N}$ o familie numărabilă de spaţii Hilbert; în acest caz, **spaţiul sumă directă al familiei** $\mathcal{H}$ se defineşte prin:

$$\bigoplus_{n\in N} H_n = \{x = (x_n)_{n\in N}\,;\, x_n \in H_n \text{ şi } \sum_{n\in N} \| x_n \|_n^2 < \infty\}.$$

Produsul scalar şi norma sunt definite prin:

$$< x, y >= \sum_{n\in N} < x_n, y_n >_n \ \text{ şi}$$

$$\| x \|= \sqrt{\sum_{n\in N} \| x_n \|_n^2},$$

unde, $x = (x_n)_{n\in N}$ şi $y = (y_n)_{n\in N}$. Se demonstrează că spaţiul astfel obţinut este spaţiu Hilbert. Pentru demonstraţii şi completări, recomandăm [6](I),p.255.
Un caz particular important se obţine dacă $H_n = L^2(\Omega_n, \mu_n)$.

Vom studia în continuare spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil pe cercul unitate.

18.Definiţie
Fie $\mathcal{S}^1$ cercul unitate (considerat cu măsura Lebesgue) şi fie $L^2(\mathcal{S}^1)$ spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil cu produsul scalar:

$$< f, g >= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})\overline{g(e^{it})}dt$$

şi norma:

$$\| f \|_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{\int_0^{2\pi} |f(e^{it})|^2 dt}.$$

Vom defini în continuare o bază ortonormală remarcabilă în $L^2(\mathcal{S}^1)$. Fie, pentru orice $n \in Z$, funcţia:

$$\omega_n(e^{it}) = e^{int}$$

şi fie mulţimea (numărabilă) $\{\omega_n\}_{n\in Z}$.
Are loc următorul rezultat fundamental:

19.Teoremă
Mulţimea $\{\omega_n\}_{n\in Z}$ este bază ortonormală în spaţiul $L^2(\mathcal{S}^1)$.
Pentru demonstraţie, recomandăm [8],p.321 sau [4],p.162.
În continuare vom subînţelege că pe spaţiul $L^2(\mathcal{S}^1)$ a fost fixată baza ortonormală $\{\omega_n\}_{n\in Z}$.
Şirul coeficienţilor Fourier asociaţi unei funcţii $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ este:

$$\widehat{f} : Z \to C,\ \widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt,$$

iar seria (de funcţii) Fourier corespunzătoare este:

$$\sum_{n\in Z} \widehat{f}(n)\omega_n.$$

Sumele parţiale ale acestei serii se numesc **polinoame trigonometrice**:

$$S_n(e^{it}) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikt}.$$

Conform teoremei 15, seria de funcţii $\sum\limits_{n\in Z} \widehat{f}(n)\omega_n$ converge în spaţiul $L^2(\mathcal{S}^1)$ la funcţia f, adică:

$$\lim_{n\to\infty} \| f - S_n \|_2 = 0.$$

Teorema 15 nu dă informaţii despre alte tipuri de convergenţă specifice spaţiilor de funcţii (convergenţă punctuală sau convergenţă uniformă, de

exemplu) care se pot pune în legătură cu seria Fourier. Există în această direcţie câteva teoreme clasice: Fejer, Dini, Dirichlet; dintre acestea, reamintim teorema lui Fejer:

20.Teoremă (Fejer)
Fie $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ o funcţie continuă şi fie S_n şirul sumelor parţiale ale seriei Fourier asociate ei; atunci şirul

$$\varsigma_n = \frac{S_o + S_1 + .. + S_n}{n+1}$$

converge uniform pe $\mathcal{S}^1$ la f.
O consecinţă directă a acestui rezultat este că orice funcţie continuă se poate aproxima uniform (adică în norma $\| \, \|_\infty$) cu polinoame trigonometrice.
Tot de aici rezultă că dacă două funcţii continue au aceiaşi coeficienţi Fourier, atunci ele sunt egale.
Pentru demonstraţie, cât şi pentru alte completări asupra acestui subiect, recomandăm [8],p.323 sau [13],p.101.

21.Definiţie (transformarea Fourier pe spaţiul $L^2(\mathcal{S}^1)$)
Fie $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$; din identitatea lui Parseval rezultă faptul că şirul $\widehat{f}$ aparţine spaţiului $\ell^2(Z)$ şi $\| f \|_2 = \| \widehat{f} \|_2$. Rezultă deci că aplicaţia:

$$\mathcal{F} : L^2(\mathcal{S}^1) \to \ell^2(Z) \, , \, \mathcal{F}(f) = \widehat{f}$$

este izometrie liniară; $\mathcal{F}$ se numeşte **transformarea Fourier** (între spaţiile $L^2(\mathcal{S}^1)$ şi $\ell^2(Z)$), iar $\widehat{f}$ se numeşte **transformata Fourier** (sau **Fourier-Plancherel**) a funcţiei f.
Din teorema 15 şi din completitudinea spaţiului $L^2(\mathcal{S}^1)$, rezultă că aplicaţia $\mathcal{F}$ este şi surjectivă: pentru orice $x \in \ell^2(Z)$, seria $\sum\limits_{n \in Z} x(n)\, \omega_n$ converge în spaţiul $L^2(\mathcal{S}^1)$, deci defineşte o funcţie f (de fapt o clasă de echivalenţă de funcţii egale a.p.t.) care are în mod evident proprietatea $\mathcal{F}(f) = x$, ([8],p.328; [13],p.256). În concluzie, transformarea Fourier $\mathcal{F}$ este un izomorfism de spaţii Hilbert având ca inversă aplicaţia

$$\mathcal{F}^{-1} : \ell^2(Z) \to L^2(\mathcal{S}^1), \, \mathcal{F}^{-1}(x) = \sum_{n \in Z} x(n)\, \omega_n.$$

Menţionăm că în egalitatea de mai sus $\sum\limits_{n \in Z} x(n)\omega_n$ semnifică suma seriei în sensul normei $\| \, \|_2$.

Restricţia aplicaţiei $\mathcal{F}^{-1}$ la subspaţiul $\ell^1(Z) \subset \ell^2(Z)$ admite o formulă punctuală explicită.

22.Teoremă
Dacă $\alpha \in \ell^1(Z)$, atunci:

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\alpha\right)(e^{it}) = \sum_{n\in Z} \alpha(n)e^{int}, \ \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Demonstraţie Deoarece $\alpha \in \ell^1(Z)$, seria $\sum\limits_{n\in Z} \alpha(n)e^{int}$ converge absolut şi uniform pe $\mathcal{S}^1$:

$$\sum_{n\in Z} |\alpha(n)e^{int}| \leq \sum_{n\in Z} |\alpha(n)| = \| \alpha \|_1, \ \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Fie f suma seriei de mai sus. Atunci f este o funcţie continuă şi mărginită; în particular, rezultă că $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, deci îi putem calcula coeficienţii Fourier:

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{m\in Z}\alpha(m)e^{imt}\right)e^{-int}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sum_{m\in Z}\alpha(m)\int_0^{2\pi} e^{it(m-n)}dt = \alpha(n), \ \forall n \in Z.$$

Comutarea seriei cu integrala este justificată deoarece amândouă sunt absolut convergente şi ca urmare se poate aplica teorema lui Fubini (a se vedea [8],p.256; [19],p.165.). În concluzie, $\mathcal{F}f = \alpha$, deci $\mathcal{F}^{-1}\alpha = f$, (egalitatea este adevărată peste tot, deoarece f este funcţie continuă; a se vedea teorema lui Fejer), ceea ce încheie demonstraţia.

23.Observaţie
Conform celor de mai sus, restricţia lui $\mathcal{F}^{-1}$ la subspaţiul $\ell^1(Z)$ ia valori în mulţimea funcţiilor continue (definite pe cerc). Fie

$$A(\mathcal{S}^1) = \{\mathcal{F}^{-1}x\,;\, x \in \ell^1(Z)\}.$$

Se poate demonstra ([15],p.9) că $A(\mathcal{S}^1)$ este o submulţime densă în $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$ (în norma $\| \, \|_\infty$); cum $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$ este la rândul ei densă în $L^2(\mathcal{S}^1)$, (în norma $\| \, \|_2$), rezultă că $A(\mathcal{S}^1)$ este o submulţime densă în $L^2(\mathcal{S}^1)$, adică:

$$\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1), \ \forall \epsilon > 0, \ \exists x \in \ell^1(Z) \text{ astfel încât } \| f - \mathcal{F}^{-1}x \|_2 < \epsilon.$$

24.Observaţie
Un subspaţiu închis, cu proprietăţi remarcabile, (definit cu ajutorul transformării Fourier), inclus în $L^2(\mathcal{S}^1)$, este

$$H^2(\mathcal{S}^1) = \{f \in L^2(\mathcal{S}^1)\,;\, \widehat{f}(n) = 0\,,\, \forall n < 0\}.$$

Funcţiile din $H^2(\mathcal{S}^1)$ se numesc **funcţii analitice de pătrat integrabil**; seria Fourier asociată unei funcţii $f \in H^2(\mathcal{S}^1)$ este de forma:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \widehat{f}(n)\lambda^n,$$

unde, am notat $\lambda = e^{it}$.
Dintre rezultatele referitoare la funcţiile din $H^2(\mathcal{S}^1)$, enunţăm următoarea proprietate de prelungire la discul unitate:
Pentru orice $f \in H^2(\mathcal{S}^1)$, există o funcţie g cu proprietăţile:
(a) g este olomorfă pe discul unitate deschis;
(b) $\lim\limits_{r\to 1} g(re^{it}) = f(e^{it})$, aproape pentru orice $e^{it} \in \mathcal{S}^1$ (în raport cu măsura Lebesgue pe $\mathcal{S}^1$);
(c) $\lim\limits_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} |f(e^{it}) - g(re^{it})|^2\, dt = 0$;
(d) g se poate obţine din f cu ajutorul formulei lui Cauchy:

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathcal{S}^1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

unde, am notat $z = re^{it}$. Pentru demonstraţii, cât şi pentru alte rezultate din teoria spaţiilor H^p (aici noi am prezentat doar cazul $p = 2$) se pot consulta [13] p.328; [11],p.39.

Capitolul 2

Operatori pe spaţii finit dimensionale

2.1 Noţiuni de algebră liniară

În acest paragraf vom reaminti unele rezultate de algebră liniară finit dimensională. Sursa bibliografică pe care o vom cita în mod sistematic este [1].

1.Definiţie
Fie $C^n = \{x = (x_1, x_2, .., x_n)\,;\, x_j \in C\}$ spaţiul Hilbert complex de dimensiune n, (cf exemplului 17(i),cap.1), cu produsul scalar şi norma uzuale:

$$< x, y >= \sum_{j=1}^{n} x_j \overline{y_j}\ ,\ \| x \|= \sqrt{\sum_{j=1}^{n} |x_j|^2}.$$

O aplicaţie (**operator**) $T : C^n \to C^n$ se numeşte **liniară** dacă

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y),\ \forall \alpha, \beta \in C,\ \forall x, y \in C^n.$$

Vom nota cu $\mathcal{L}(C^n)$ **mulţimea operatorilor liniari** pe C^n.
Cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari:

$$(T + S)(x) = Tx + Sx,\ (\alpha T)x = \alpha Tx,\ \forall \alpha \in C, \forall x \in C^n,\ \forall T, S \in \mathcal{L}(C^n),$$

mulţimea $\mathcal{L}(C^n)$ este spaţiu vectorial; vom nota cu O operatorul nul şi cu I aplicaţia identică.
Produsul (compunerea) a doi operatori $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$ este, prin definiţie

$$(TS)x = T(Sx),\ \forall x \in C^n.$$

Evident, operatorul TS este şi el liniar. Proprietăţile produsului sunt binecunoscute: asociativ, distributiv faţă de adunare şi admite ca element neutru operatorul identic I; el nu este comutativ. Dacă un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este injectiv şi surjectiv (deci bijectiv), atunci există şi este unic un operator, T^{-1}, de asemenea liniar, (numit **inversul** lui T) astfel încât $TT^{-1} = T^{-1}T = I$. Operatorul T se numeşte în acest caz **inversabil**. Pentru orice operatori inversabili $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$ şi $0 \neq \alpha \in C$, se verifică afirmaţiile:
(a) $(T^{-1})^{-1} = T$.
(b) $(\alpha T)^{-1} = \alpha^{-1}T^{-1}$.
(c) Produsul TS este inversabil şi $(TS)^{-1} = S^{-1}T^{-1}$.
Oricărui operator liniar T, i se pot asocia două subspaţii vectoriale remarcabile: **nucleul**, notat $\mathrm{Ker}(T)$, şi **imaginea**, notată $\mathrm{Im}(T)$, definite prin:

$$\mathrm{Ker}(T) = \{x \in C^n\,;\, Tx = 0\} \text{ şi } \mathrm{Im}(T) = \{Tx\,;\, x \in C^n\}.$$

Evident, operatorul T este injectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$ şi este surjectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Im}(T) = C^n$.
O noţiune ce va fi frecvent utilizată în continuare este aceea de **subspaţiu invariant** pentru un operator. Un subspaţiu $\mathcal{X} \subseteq C^n$ se numeşte **invariant** pentru operatorul T dacă:

$$\forall x \in \mathcal{X} \Rightarrow Tx \in \mathcal{X}.$$

Nucleul şi imaginea unui operator sunt subspaţii invariante pentru acel operator.

2.Observaţie

Un rezultat important în legătură cu inversabilitatea operatorilor din $\mathcal{L}(C^n)$ (şi care nu este adevărat pentru aplicaţii liniare de la C^n în C^m, $m \neq m$ şi nici pentru aplicaţii liniare pe un spaţiu vectorial infinit dimensional) este următorul:

Pentru orice operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T este inversabil.
(b) T este injectiv.
(c) T este surjectiv.
Demonstraţia poate fi găsită în [1],pag.42.

3.Definiţie

Fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ o bază (nu neapărat ortonormală) în C^n şi fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator fixat. Fie, pentru orice $\imath, \jmath \in \{1, 2, .., n\}$,

$$a_{\imath\jmath} =< Tu_\jmath, u_\imath > .$$

Matricea $M_T^{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{i,j}$ se numeşte **matricea operatorului** T în baza $\mathcal{B}$, ([1],p.43). Se verifică prin calcul direct egalitatea:

$$Tu_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} u_j, \ \forall i \in \{1, 2, .., n\}.$$

Mai general, dacă $x = (x_1, x_2, .., x_n) \in C^n$ este un vector arbitrar, atunci

$$(Tx)_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \ \forall i \in \{1, 2, .., n\}.$$

Matriceal, relaţia de mai sus se scrie $Tx = M_T^{\mathcal{B}} x$, vectorul x fiind aici vector coloană.
În cazul în care $\mathcal{B}$ este baza canonică, vom nota cu M_T matricea lui T în această bază.
Utilitatea asocierii $T \to M_T^{\mathcal{B}}$ este dată de următoarea teoremă ([1],p.44):

4.Teoremă
Fie $\mathcal{M}_n$ mulţimea matricelor pătratice de ordinul n cu elemente complexe şi fie $\mathcal{B}$ o bază fixată în C^n.
(a) Aplicaţia $\mathcal{L}(C^n) \ni T \to M_T^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n$ este un izomorfism de spaţii vectoriale şi:

$$M_{T+S}^{\mathcal{B}} = M_T^{\mathcal{B}} + M_S^{\mathcal{B}}, \ M_{\alpha T}^{\mathcal{B}} = \alpha M_T^{\mathcal{B}},$$

pentru orice $\alpha \in C$ şi $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$.
(b) Aplicaţia $\mathcal{L}(C^n) \ni T \to M_T^{\mathcal{B}} \in \mathcal{M}_n$ este un izomorfism de inele şi

$$M_{TS}^{\mathcal{B}} = M_T^{\mathcal{B}} M_S^{\mathcal{B}}, \forall T, S \in \mathcal{L}(C^n).$$

În particular, operatorul T este inversabil dacă şi numai dacă matricea sa (în orice bază, deoarece $\mathcal{B}$ a fost aleasă arbitrar) este nesingulară:

$$\det M_T^{\mathcal{B}} \neq 0.$$

5.Definiţie
Fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ şi $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, .., v_n\}$ două baze fixate în C^n. Pentru orice vector $v_j \in \mathcal{V}$ există (şi sunt unici) $p_{ij} \in C$ astfel încât:

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} u_j.$$

Matricea $\mathcal{P} = (p_{ij})_{ij}$ se numeşte **matricea de trecere** de la baza $\mathcal{B}$ la baza $\mathcal{V}$. Dacă $S : C^n \to C^n$ este aplicaţia liniară definită (pe bază) prin

$$Su_j = v_j, \ \forall j \in \{1, 2, .., n\},$$

atunci $\mathcal{P}$ este matricea lui S în baza $\mathcal{B}$:

$$\mathcal{P} = M_S^{\mathcal{B}}.$$

Este uşor de demonstrat că orice matrice de trecere este nesingulară, şi, reciproc, orice matrice nesingulară este matricea de trecere între două baze (bine alese).

6.Observaţie

Fie acum un operator liniar $T \in \mathcal{L}(C^n)$; atunci legătura dintre matricele lui T în bazele $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{V}$ şi matricea de trecere $\mathcal{P}$ între aceste două baze este ([1],p.52):

$$M_T^{\mathcal{V}} = \mathcal{P}^{-1} M_T^{\mathcal{B}} \mathcal{P}.$$

Din faptul că matricea unui operator depinde de alegerea bazei, decurge in mod natural problema găsirii unei baze în care matricea operatorului să aibă o formă cât mai simplă, de exemplu formă diagonală. Această problemă (numită "diagonalizarea operatorilor liniari" pe C^n) constituie subiectul central al acestui capitol. Menţionăm că analogul infinit dimensional al diagonalizării (deci pentru operatori definiţi pe spaţii Hilbert infinit dimensionale) este unul din scopurile principale ale acestei lucrări şi va fi discutat în cap.5

7.Definiţie

Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$.
(a) T se numeşte **operator diagonal** dacă matricea sa în baza canonică (a lui C^n) este matrice diagonală.
(b) Spunem că T este **diagonalizabil în sens algebric** dacă există o bază a lui C^n în care matricea lui T să fie matrice diagonală.
(c) Spunem că T este **diagonalizabil în sens geometric** dacă există o bază ortonormală a lui C^n în care matricea lui T să fie matrice
diagonală.
Evident, avem implicaţiile:

$$\textbf{(a)} \Rightarrow \textbf{(c)} \Rightarrow \textbf{(b)}.$$

În acest paragraf vom reaminti (fără demonstraţii) principalele rezultate cu privire la operatorii diagonalizabili în sens algebric, iar în ultimul paragraf al acestui capitol vom studia (şi caracteriza) operatorii diagonalizabili în sens geometric.
Pentru diagonalizarea în sens algebric recomandăm [1],p.75-90, unde sunt prezentate demonstraţiile complete ale rezultatelor ce urmează.
Instrumentele esenţiale pentru studiul diagonalizării sunt **polinomul caracteristic**, **vectorii** şi **valorile proprii**.

8.Teorema Hamilton-Cayley
Fie $A \in \mathcal{M}_n$ şi fie I_n matricea unitate de ordinul n. **Polinomul caracteristic al matricei** A, este, prin definiţie,

$$P_A(z) = \det(zI_n - A).$$

Evident, P_A este un polinom de gradul n cu coeficienţi complecşi (şi de variabilă complexă z).
Dacă A şi B sunt două matrice pentru care există o matrice nesingulară $\mathcal{P}$ astfel încât $B = \mathcal{P}^{-1}A\mathcal{P}$, atunci se demonstrează că polinoamele lor caracteristice sunt egale: $P_A = P_B$. În particular, această proprietate se poate aplica în cazul în care matricele A şi B sunt matricele (în două baze diferite) ale aceluiaşi operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$. Rezultă deci că putem defini **polinomul caracteristic al operatorului** $T \in \mathcal{L}(C^n)$ prin egalitatea:

$$P_T(z) = \det\left(zI_n - M_T^{\mathcal{B}}\right),$$

baza $\mathcal{B}$ fiind arbitrară.

Fie acum un polinom arbitrar, $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k$; prin definiţie, polinomul de matricea A definit de f, este matricea:

$$f(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + ... + a_1 A + a_o I_n.$$

Teorema Hamilton-Cayley ([1],p.76) afirmă că

$$P_A(A) = O_n,$$

unde, O_n este matricea nulă de ordinul n.

9.Valori proprii şi vectori proprii
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$. **Spectrul** operatorului T este, prin definiţie, mulţimea ([1],p.79):

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C \ ; \text{ operatorul } \lambda I - T \text{ nu este inversabil}\}.$$

Mulţimea **valorilor proprii** ale operatorului T (sau **spectrul punctual**) este, prin definiţie:

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in C \ ; \text{ operatorul } T \text{ nu este injectiv}\}.$$

Incluziunea $\sigma_p(T) \subseteq \sigma(T)$ este evidentă. Dar, deoarece pe spaţii finit dimensionale un operator liniar este inversabil dacă şi numai dacă este injectiv,

rezultă că avem egalitatea $\sigma(T) = \sigma_p(T)$. În concluzie, un număr λ este în spectru dacă şi numai dacă λ este valoare proprie. Din această cauză, spectrul unui operator pe C^n se mai numeşte şi mulţimea valorilor proprii. Vom vedea că pe spaţii infinit dimensionale această proprietate nu mai este adevărată, spectrul punctual fiind, în general, o submulţime strictă a spectrului; există chiar exemple de operatori care nu au valori proprii, dar al căror spectru este nevid (a se vedea, de exemplu, operatorii de translaţie din cap.5).
Este acum evident că spectrul operatorului T este format din rădăcinile polinomului caracteristic asociat lui T:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C \ ; \ P_T(\lambda) = 0\}.$$

În particular, rezultă că spectrul unui operator pe C^n este o mulţime nevidă şi finită.
De asemenea, $\lambda \in \sigma(T)$ dacă şi numai dacă există $x \in C^n$, $x \neq 0$, astfel încât $Tx = \lambda x$. Un astfel de vector x se numeşte **vector propriu** asociat valorii proprii λ. Mulţimea vectorilor proprii asociaţi unei valori proprii fixate, λ, (la care adăugăm şi vectorul nul), este, în mod evident egală cu subspaţiul $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$.
Subspaţiile de vectori proprii au proprietăţile:
(a) Sunt subspaţii invariante pentru operatorul T, deci:

$$\forall x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T) \Rightarrow Tx \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T).$$

(b) Dacă λ şi μ sunt două valori proprii distincte ale lui T, atunci:

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \cap \mathrm{Ker}(\mu I - T) = \{0\}.$$

Fie $\lambda \in \sigma(T)$. Multiplicitatea lui λ ca rădăcină a polinomului caracteristic P_T se numeşte dimensiunea (multiplicitatea) algebrică a lui λ şi o vom nota $n(\lambda)$. Evident, suma dimensiunilor algebrice ale tuturor valorilor proprii este egală cu n. Dimensiunea (multiplicitatea) geometrică a valorii proprii λ (notată $r(\lambda)$) este, prin definiţie, egală cu dimensiunea subspaţiului $\mathrm{Ker}(\lambda I - T)$. În general, are loc inegalitatea:

$$r(\lambda) \leq n(\lambda), \, \forall \lambda \in \sigma(T).$$

Încheiem acest paragraf recapitulativ cu rezultatul principal în legătură cu diagonalizarea în sens algebric a operatorilor liniari pe C^n.

10.Teoremă (Criteriul de diagonalizare algebrică, [1],p.85**)**
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$; următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) T este diagonalizabil în sens algebric.
(b) Există o bază $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T.
(c) $r(\lambda) = n(\lambda), \ \forall \lambda \in \sigma(T)$.
(d) $\bigoplus_{\lambda \in \sigma(T)} \ker(\lambda I - T) = C^n$.

În ipoteza că T este diagonalizabil în sens algebric, matricea sa în baza $\mathcal{B}$ are pe diagonală valorile proprii ale lui T, iar matricea de trecere $\mathcal{P}$ de la baza canonică la baza $\mathcal{B}$ are drept coloane vectorii proprii din baza $\mathcal{B}$. În concluzie, dacă $\sigma(T) = \{\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n\}$, (fiecare valoare proprie fiind repetată de un număr egal cu dimensiunea sa algebrică), atunci:

$$M_T^{\mathcal{B}} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n) = \mathcal{P}^{-1} M_T \mathcal{P}.$$

2.2 Norma unui operator; continuitate

11.Definiţie
Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ se numeşte **continuu în punctul** $x_o \in C^n$ dacă, prin definiţie, $\forall \epsilon > 0, \ \exists \delta > 0$, astfel încât pentru orice $x \in C^n$ cu proprietatea $\| x - x_o \| < \delta$, să rezulte $\| Tx - Tx_o \| < \epsilon$. O formulare echivalentă (cu şiruri) a acestei definiţii este: pentru orice şir $(x_m)_m \subset C^n$ cu proprietatea $\lim_{m \to \infty} x_m = x_o$, să rezulte $\lim_{m \to \infty} Tx_m = Tx_o$.
Operatorul T se numeşte **continuu** dacă este continuu în orice punct.
Pentru aplicaţiile liniare are loc următorul criteriu de continuitate.

12.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ şi $x_o \in C^n$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T este continuu în x_o.
(b) T este continuu.
(c) Există $M > 0$ astfel încât $\| Tx \| \leq M \| x \|, \ \forall x \in C^n$.

În primul paragraf al capitolului următor, (propoziţia 3,cap.3) vom da o demonstraţie a acestei propoziţii într-o situaţie mai generală, înlocuind spaţiul C^n cu un spaţiu normat arbitrar.
De altfel, aşa cum vom mai vedea, şi alte rezultate din acest capitol sunt adevărate în condiţii mai generale (de obicei "mai general" însemnând dimensiune infinită). În unele cazuri, demonstraţia pe C^n se poate adapta fără probleme la spaţii infinit dimensionale (cum este cazul propoziţiei de mai sus), alteori raţionamentele diferă complet.
Un rezultat remarcabil, adevărat numai în cazul finit dimensional, este următorul.

13.Teoremă
Orice operator liniar $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este continuu.
Demonstraţie Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ şi fie $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, .., e_n\}$ baza canonică a lui C^n. Fie $K = \max\{\| Te_1 \|, \| Te_2 \|, .., \| Te_n \|\}$; fie $x = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j e_j$ un vector din C^n. În mod evident avem:

$$|x_j| \leq \| x \|, \forall 1 \leq j \leq n.$$

Folosind inegalitatea triunghiului şi inegalităţile anterioare, rezultă:

$$\| Tx \| = \| T \left(\sum_{j=1}^{n} x_j e_j \right) \| = \| \sum_{j=1}^{n} x_j T e_j \| \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} |x_j| \, \| Te_j \| \leq nK \| x \| .$$

Din propoziţia precedentă, ((**b**)$\Leftrightarrow$ (**c**)), rezultă că T este aplicaţie continuă.

14.Definiţie (norma unui operator)
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$. Datorită punctului (c) din propoziţia 12 putem defini:

$$\| T \| = \inf\{M > 0 \; ; \; \| Tx \| \leq M \| x \|, \; \forall x \in C^n\}.$$

Fie, de asemenea (notaţiile care urmează nu vor mai fi folosite în continuare):

$$\| T \|_1 = \sup\{\| Tx \| \; ; \; x \in C^n \text{ şi } \| x \| = 1\},$$

$$\| T \|_2 = \sup\{\| Tx \| \; ; \; x \in C^n \text{ şi } \| x \| \leq 1\},$$

$$\| T \|_3 = \sup\{| < Tx, y > | \; ; \; \| x \| = \| y \| = 1\}.$$

În lema 5, cap.3, vom demonstra (înlocuind C^n cu un spaţiu normat arbitrar) că $\| T \| = \| T \|_1 = \| T \|_2$; tot acolo, vom demonstra că aplicaţia $\| \;\; \|$ este o normă pe spaţiul $\mathcal{L}(C^n)$. Propunem ca exerciţiu egalitatea $\| T \|_3 = \| T \|$. Rezultă deci că $(\mathcal{L}(C^n), \| \;\; \|)$ este un spaţiu normat. Completitudinea acestui spaţiu va fi demonstrată în capitolul 3 (teorema 7), în condiţii mai generale (înlocuind spaţiul Banach C^n cu un spaţiu Banach arbitrar). În concluzie, spaţiul operatorilor liniari (şi continui) pe C^n este un spaţiu Banach.

2.3 Diagonalizarea operatorilor normali

În acest paragraf vom caracteriza operatorii care sunt diagonalizabili în sens geometric (cf. definiţiei 7).

15.Lemă (adjunctul unui operator)
Pentru orice $T \in \mathcal{L}(C^n)$, există un unic operator, $T^\star \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât:

$$< Tx, y >=< x, T^\star y >, \forall x, y \in C^n.$$

Operatorul $T^\star$ se numeşte **adjunctul** lui T. Demonstraţia se bazează în mod esenţial pe teorema lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe un spaţiu Hilbert (teorema 13, cap.1); în capitolul 5, paragraful 1 vom face demonstraţia pentru un spaţiu Hilbert arbitrar.
Alte proprietăţi remarcabile ale adjunctului sunt (propoziţiile 1şi 2,cap.5 sau [1],p.125):
(i) $(\alpha T + \beta S)^\star = \overline{\alpha} T^\star + \overline{\beta} S^\star$, $\forall \alpha, \beta \in C$, $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$.
(ii) $(T^\star)^\star = T$, $\forall T \in \mathcal{L}(C^n)$.
(iii) $(TS)^\star = S^\star T^\star$, $\forall T, S \in \mathcal{L}(C^n)$.
(iv)$\| T^\star T \| = \| T \|^2$, $\forall T \in \mathcal{L}(C^n)$.
(v) $\| T^\star \| = \| T \|$, $\forall T \in \mathcal{L}(C^n)$.
(vi) Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este inversabil, atunci $(T^{-1})^\star = (T^\star)^{-1}$.

16.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ şi fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ o bază ortonormală în C^n. Dacă $M_T^{\mathcal{B}} = (a_{ij})_{ij}$ este matricea lui T în baza $\mathcal{B}$, atunci $M_{T^\star}^{\mathcal{B}} = (\overline{a_{j,i}})_{ij}$.
În particular, dacă elementele a_{ij} sunt reale, atunci matricea lui $T^\star$ este transpusa matricei lui T.
Demonstraţie Fie $M_{T^\star}^{\mathcal{B}} = (b_{ij})_{ij}$; conform definiţiei 3, avem:

$$b_{ij} =< T^\star u_j, u_i >=< u_j, Tu_i >=$$

$$= \overline{< Tu_i, u_j >} = \overline{a_{ji}}, \forall i, j \in \{1, 2, .., n\},$$

ceea ce încheie demonstraţia.
Cu ajutorul noţiunii de adjunct, putem defini câteva clase remarcabile de operatori:

17.Definiţie
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$.
(a) T se numeşte **autoadjunct** dacă $T = T^\star$.
(b) T se numeşte **unitar** dacă $TT^\star = T^\star T = I$.

Este uşor de observat (deoarece C^n are dimensiune finită), că în definiţia dată mai sus este suficientă doar condiţia $T^\star T = I$ (de exemplu), cealaltă fiind o consecinţă. Pe spaţii Hilbert infinit dimensionale amândouă condiţiile sunt necesare.
(c) T se numeşte **pozitiv** (şi vom nota $T \geq O$) dacă

$$< Tx, x > \geq 0, \ \forall x \in C^n.$$

Aşa cum vom vedea, pe C^n (ca şi pe orice spaţiu Hilbert complex), orice operator pozitiv este autoadjunct. În cazul unui spaţiu Hilbert real definiţia de mai sus nu mai implică $T = T^\star$; de aceea, în cazul R^n în definiţia operatorului pozitiv se cere şi condiţia de a fi autoadjunct.
(d) T se numeşte **normal** dacă $TT^\star = T^\star T$.
Există o analogie între operatori liniari şi numere complexe în care operatorii autoadjuncţi corespund numerelor reale, operatorii unitari corespund numerelor complexe de modul 1, iar operatorii pozitivi corespund numerelor pozitive. De exemplu, orice operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ se poate scrie în mod unic sub forma $T = A + iB$, cu A şi B operatori autoadjuncţi, această descompunere fiind analogul descompunerii (Carteziene) a unui număr complex $z = a + ib$, cu $a, b \in R$; într-adevăr, dacă $A = \frac{1}{2}(T + T^\star)$ şi $B = \frac{1}{2i}(T - T^\star)$, atunci A şi B sunt autoadjuncţi şi $A + iB = T$.

$$T \in \mathcal{L}(C^n) \leftrightarrow z \in C.$$

$$A = A^\star \leftrightarrow z = \overline{z} \in R.$$

$$U^\star U = I \leftrightarrow z\overline{z} = |z|^2 = 1.$$

Menţionăm că, aşa cum vom vedea în continuare, există şi alte rezultate care întăresc această analogie, inclusiv în cazul infinit dimensional (a se vedea cap.5).

Revenim acum la problema diagonalizării în sens geometric, care constituie subiectul central al acestui paragraf; rezultatul fundamental (pe care îl vom demonstra în teorema 28) este:

$$T \text{ este diagonalizabil în sens geometric } \Leftrightarrow T \text{ este normal.}$$

Primul rezultat se referă la operatorii unitari.

18.Teoremă
Fie $U \in \mathcal{L}(C^n)$; următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) U este operator unitar.

(b) U este inversabil şi U^{-1} este unitar.
(c) $< Ux, Uy >=< x, y >$, $\forall x, y \in C^n$.
(d) U transformă orice bază ortonormală în bază ortonormală.
Demonstraţie (a)⇒ (b) Dacă U este unitar, atunci, din definiţie, U este inversabil şi $U^{-1} = U^\star$; operatorul U^{-1} este unitar deoarece:

$$\left(U^{-1}\right)^\star U^{-1} = (U^\star)^{-1} U^{-1} = (UU^\star)^{-1} = I.$$

(b)⇒ (c) Pentru orice $x, y \in C^n$, avem:

$$< x, y >=< U^{-1}Ux, y >=< Ux, \left(U^{-1}\right)^\star y >=< Ux, Uy > .$$

(c)⇒ (d) Fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ o bază ortonomală, deci

$$< u_\imath, u_\jmath >= \delta_\imath^\jmath, \text{ (simbolul lui Kronecker).}$$

Mulţimea $\{Uu_1, Uu_2, .., Uu_n\}$ este bază ortonormală deoarece:

$$< Uu_\imath, Uu_\jmath >=< u_\imath, u_\jmath >= \delta_\imath^\jmath, \ \forall \imath, \jmath \in \{1, 2, .., n\}.$$

(d)⇒ (c) Fie $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ baza canonică şi fie

$$x = \sum_{\imath=1}^{n} x_\imath e_\imath \text{ şi } y = \sum_{\imath=1}^{n} y_\imath e_\imath.$$

Deoarece, conform ipotezei, $\{Ue_1, Ue_2, .., Ue_n\}$ este tot bază ortonormală, avem:

$$< Ux, Uy >=< \sum_{\imath=1}^{n} x_\imath Ue_\imath, \sum_{\jmath=1}^{n} y_\jmath Ue_\jmath >=$$

$$= \sum_{\imath=1}^{n} \sum_{\jmath=1}^{n} x_\imath y_\jmath < Ue_\imath, Ue_\jmath >= \sum_{\imath=1}^{n} x_\imath y_\imath =< x, y > .$$

(c)⇒ (a) Propunem mai întâi ca exerciţiu următoarea afirmaţie: doi operatori $T, S \in \mathcal{L}(C^n)$ sunt egali dacă şi numai dacă

$$< Tx, y >=< Sx, y >, \ \forall x, y \in C^n.$$

Pentru orice $x, y \in C^n$, avem:

$$< U^\star Ux, y >=< Ux, Uy >=< x, y >,$$

şi deci $U^\star U = I$.

19.Observaţie
Punctul **(d)** din teorema de mai sus arată că matricele operatorilor unitari sunt exact matricele de trecere între două baze ortonormale. Mai mult, matricea (într-o bază ortonormală) a unui operator unitar are drept coloane vectori ortonormali; o astfel de matrice se numeşte matrice ortogonală.
Din egalitatea (c) din teorema 18 rezultă $\| Ux \| = \| x \|, \forall x \in C^n$, deci operatorii unitari sunt izometrii liniare; pe spaţiul C^n se poate demonstra şi reciproca: orice izometrie liniară este operator unitar. Într-adevăr, dacă

$$\| Ux \| = \| x \|, \forall x \in C^n,$$

atunci $< Ux, Ux > = < x, x >, \forall x \in C^n$ şi deci

$$< U^{\star}Ux, x > = < x, x >, \forall x \in C^n.$$

Demonstraţia se încheie dacă folosim următorul rezultat adevărat numai pe spaţii Hilbert complexe (demonstraţia, care este elementară, se găseşte în capitolul 5, propoziţia 9):
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator arbitrar; dacă $< Tx, x > = 0, \forall x \in C^n$, atunci $T = O$.
Vom vedea (în capitolul 5) că pe spaţii Hilbert infinit dimensionale există izometrii liniare neinversabile.
Utilitatea operatorilor unitari pentru problema diagonalizării în sens geometric este conţinută în următoarea teoremă.

20.Teoremă
(a) Un operator $D \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator diagonal dacă şi numai dacă vectorii bazei canonice sunt vectori proprii pentru D.
(b) Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator diagonalizabil în sens geometric dacă şi numai dacă există o bază ortonormală a lui C^n formată din vectori proprii ai lui T, sau, echivalent, există un operator unitar U astfel încât operatorul $D = U^{-1}TU$ să fie operator diagonal.
Demonstraţie (a) Dacă $D \in \mathcal{L}(C^n)$ este un operator diagonal, atunci, prin definiţie, matricea sa în baza canonică este:

$$M_D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix},$$

unde, $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ sunt valorile proprii ale lui D. Dacă $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ este baza canonică, atunci evident $De_\imath = \lambda_\imath e_\imath$ şi deci $e_\imath$ este vector propriu asociat valorii proprii $\lambda_\imath$.

Reciproc, dacă $De_\imath = \lambda_\imath e_\imath$, atunci elementele matricei lui D (în baza canonică), sunt:

$$a_{\imath\jmath} =< De_\jmath, e_\imath >= \begin{cases} \lambda_\imath & \text{dacă} \quad \imath = \jmath \\ 0 & \text{dacă} \quad \imath \neq \jmath. \end{cases}$$

(b) Dacă T este un operator diagonalizabil în sens geometric, atunci, din definiţie, există o bază ortonormală $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ astfel încât

$$M_T^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & . & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Fie D operatorul (diagonal) a cărui matrice în baza canonică este $M_T^{\mathcal{B}}$. Dacă U este operatorul definit de relaţiile

$$Ue_\imath = u_\imath, \, \forall \imath \in \{1, 2, .., n\},$$

atunci U este operator unitar (conform teoremei 18(d)) şi $D = U^{-1}TU$. Conform celor demonstrate la punctul **(a)**, rezultă că

$$De_\imath = \lambda_\imath e_\imath, \, \forall \imath \in \{1, 2, .., n\}.$$

Rezultă deci $TUe_\imath = \lambda_\imath U e_\imath$, adică

$$Tu_\imath = \lambda_\imath u_\imath, \, \forall \imath \in \{1, 2, .., n\},$$

deci $u_1, u_2, .., u_n$ sunt vectori proprii ai lui T.
Reciproc, fie $\mathcal{B} = \{u_1, u_2, .., u_n\}$ o bază ortonormală formată din vectori proprii ai operatorului $T \in \mathcal{L}(C^n)$, deci

$$Tu_\imath = \lambda_\imath u_\imath, \, \forall \imath \in \{1, 2, .., n\}.$$

Fie U operatorul definit prin $Ue_\imath = u_\imath, \forall \imath$. Atunci U este operator unitar (cf. teoremei 18(d)); rezultă că operatorul $U^{-1}TU$ este operator diagonal deoarece vectorii bazei canonice sunt vectori proprii:

$$U^{-1}TUe_\imath = U^{-1}Tu_\imath = U^{-1}(\lambda_\imath u_\imath) = \lambda_\imath U^{-1}u_\imath = \lambda_\imath e_\imath, \, \forall \imath.$$

Rezultă deci că matricea lui T în baza $\mathcal{B}$ este diagonală, deci T este operator diagonalizabil în sens geometric.

Trecem acum la studiul operatorilor normali; înainte de a demonstra teorema de diagonalizare (în sens geometric) pentru această clasă de operatori,

vom prezenta mai întâi câteva proprietăţi uzuale ale acestora.
Reamintim că un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ se numeşte normal dacă el comută cu adjunctul său: $TT^\star = T^\star T$.

21.Propoziţie
Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator normal, atunci

$$\| Tx \| = \| T^\star x \|, \forall x \in C^n.$$

Menţionăm că reciproca acestei afirmaţii este şi ea adevărată; mai mult, rezultatul este adevărat şi în cazul infinit dimensional (a se vedea cap.5, teorema 52).
Demonstraţie Pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$\| Tx \|^2 = < Tx, Tx > = < x, T^\star Tx > =$$

$$= < x, TT^\star x > = < T^\star x, T^\star x > = \| T^\star x \|^2 .$$

22.Consecinţă
Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este operator normal, atunci Ker(T) =Ker$(T^\star)$.
Folosind propoziţia precedentă, demonstraţia este evidentă:

$$\| Tx \| = 0 \Leftrightarrow \| T^\star x \| = 0.$$

23.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal. Atunci, pentru orice $\lambda \in C$ şi $x \in C^n$, avem:

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow T^\star x = \overline{\lambda} x.$$

Deci, dacă λ este valoare proprie pentru T, iar x este un vector propriu (al lui T) corespunzător valorii proprii λ, atunci, $\overline{\lambda}$ este valoare proprie pentru $T^\star$, iar x este vector propriu (al lui $T^\star$) corespunzător valorii proprii $\overline{\lambda}$.
Demonstraţie Fie $\lambda \in \sigma(T)$; atunci, pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$Tx = \lambda x \Leftrightarrow x \in \mathrm{Ker}(\lambda I - T),$$

şi deci este suficient să demonstrăm egalitatea:

$$\mathrm{Ker}(\lambda I - T) = \mathrm{Ker}(\overline{\lambda} I - T^\star).$$

Se verifică direct că operatorul $\lambda I - T$ este normal, iar adjunctul său este $\overline{\lambda} I - T^\star$; aplicând acum consecinţa 22 operatorului (normal) $\lambda I - T$, demonstraţia se încheie.

24.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal şi fie $\lambda \neq \mu$ două valori proprii distincte ale sale. Dacă $Tx = \lambda x$ şi $Ty = \mu y$, atunci $x \perp y$.
Demonstraţie Fie T, λ, μ, x, y ca în enunţ; atunci , conform propoziţiei precedente $T^\star y = \overline{\mu} y$ şi deci:

$$\lambda < x, y >=< \lambda x, y >=< Tx, y >=< x, T^\star y >=< x, \overline{\mu} y >= \mu < x, y > .$$

Deoarece $\lambda - \mu \neq 0$, rezultă $< x, y >= 0$, adică $x \perp y$.

25.Observaţie
Din algebra liniară se ştie că pentru un operator liniar arbitrar, vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte sunt liniari independenţi; propoziţia anterioară afirmă că pentru operatorii normali, aceştia sunt perpendiculari. O formulare echivalentă este: pentru orice $\lambda, \mu \in \sigma(T), \lambda \neq \mu$, avem $\mathrm{Ker}(\lambda I - T) \perp \mathrm{Ker}(\mu I - T)$.

Pentru a putea demonstra teorema de diagonalizare pentru operatorii normali, mai sunt necesare două rezultate cu caracter general.

26.Lemă
Fie $A, B \in \mathcal{L}(C^n)$. Dacă $AB = BA$, atunci A şi B au (cel puţin) un vector propriu comun.
Demonstraţie Fie $\lambda \in \sigma(A)$ şi fie $x \neq 0$ un vector propriu corespunzător: $Ax = \lambda x$.
Din egalitatea $AB = BA$ rezultă prin inducţie $AB^k = B^k A, \forall k \in N$. Aplicând egalităţii $Ax = \lambda x$ operatorul B, obţinem: $BAx = \lambda Bx$, adică $ABx = \lambda Bx$; în concluzie, vectorul Bx este şi el vector propriu pentru operatorul A (corespunzător tot valorii proprii λ). Analog, aplicând în continuare $B^2, B^3, ...$, rezultă

$$AB^k x = \lambda B^k x, \forall k \in N,$$

şi deci toţi vectorii $B^k x$, $k \in N$, sunt vectori proprii ai operatorului A, corespunzători valorii proprii λ. Deoarece dimensiunea lui C^n este finită, rezultă că numai un număr finit dintre aceştia sunt liniari independenţi; fie

$$\{x, Bx, B^2 x, .., B^{p-1} x\}$$

primii p vectori liniari independenţi şi fie $\mathcal{X}$ subspaţiul liniar generat de ei. Proprietăţile subspaţiului $\mathcal{X}$ sunt:
(i) $\dim(\mathcal{X}) = p$.
(ii) $\forall y \in \mathcal{X}$ este vector propriu pentru operatorul A.

(iii) $\mathcal{X}$ este subspaţiu invariant pentru operatorul B, adică $B(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{X}$.
Proprietatea **(i)** este evidentă; pentru a demonstra **(ii)** este suficient să observăm că, în general, orice combinaţie liniară de vectori proprii (corespunzători toţi aceleeaşi valori proprii) este în continuare vector propriu.
Demonstrăm acum **(iii)**; pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că pentru orice vector (din bază) $B^q x \in \mathcal{X}$ rezultă $B(B^q x) \in \mathcal{X}$. Dar $B^{q+1}x \in \{x, Bx, B^2x, ...\}$ şi deci conform alegerii lui p rezultă că $B^{q+1}x$ este o combinaţie liniară a vectorilor $\{x, Bx, .., B^{p-1}x\}$, adică $B^{q+1}x \in \mathcal{X}$.
Fie $B|_{\mathcal{X}} : \mathcal{X} \to \mathcal{X}$ restricţia operatorului B la subspaţiul $\mathcal{X}$; operatorul $B|_{\mathcal{X}}$ are cel puţin o valoare proprie (deoarece $\dim(\mathcal{X}) \geq 1$) şi deci există cel puţin un vector propriu $y \in \mathcal{X}$ al operatorului B. Deoarece toţi vectorii din $\mathcal{X}$ sunt vectori proprii pentru A, rezultă că y este un vector propriu comun operatorilor A şi B.

27.Lemă
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ şi fie $\mathcal{X}$ un subspaţiu invariant pentru T. Atunci subspaţiul ortogonal, $\mathcal{X}^\perp$, este invariant pentru operatorul $T^\star$.
Demonstraţie Pentru orice $y \in \mathcal{X}^\perp$ şi $x \in \mathcal{X}$, deoarece $Tx \in \mathcal{X}$, avem:

$$< T^\star y, x >=< y, Tx >= 0.$$

Rezultă deci că $T^\star y \perp x$, $\forall x \in \mathcal{X}$, adică $T^\star y \in \mathcal{X}^\perp$.
Evident, are loc şi implicaţia reciprocă: dacă $\mathcal{X}^\perp$ este invariant la $T^\star$, atunci $\mathcal{X}$ este invariant la T.

Demonstrăm în continuare principalul rezultat al acestui paragraf.

28.Teorema de diagonalizare pentru operatori normali
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$; următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) T este operator normal.
(ii) T este operator diagonalizabil în sens geometric.
Demonstraţie Vom începe cu implicaţia mai uşoară: **(ii)⇒(i)**. Dacă T este operator diagonalizabil în sens geometric, atunci, conform teoremei 20 (b), există un operator unitar $U \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât operatorul $D = U^\star TU$ să fie operator diagonal. Deoarece $DD^\star = D^\star D$ (egalitate evidentă), rezultă:

$$TT^\star = U^\star DU\,(U^\star DU)^\star = U^\star DUU^\star D^\star U = U^\star DD^\star U =$$

$$= U^\star D^\star DU = U^\star D^\star UU^\star DU = (U^\star DU)^\star\, U^\star DU = T^\star T,$$

şi deci T este operator normal.
Demonstrăm acum implicaţia **(i)⇒(ii)**. Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal,

deci $TT^\star = T^\star T$. Pentru a demonstra că T este diagonalizabil în sens geometric este suficient, conform teoremei 20(b), să construim o bază ortonormală a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T. Deoarece operatorii T şi $T^\star$ comută, din lema 26 rezultă că există $u_1 \in C^n$ un vector propriu comun pentru T şi $T^\star$. Fie $\mathcal{X}_1$ subspaţiul liniar generat de u_1 şi fie $\mathcal{X}_1^\perp$ ortogonalul său. Proprietăţile subspaţiilor $\mathcal{X}_1$ şi $\mathcal{X}_1^\perp$ sunt:
(i) $\mathcal{X}_1 \bigoplus \mathcal{X}_1^\perp = C^n$.
(ii) $\dim \mathcal{X}_1 = 1$ şi $\dim \mathcal{X}_1^\perp = n-1$.
(iii) $\mathcal{X}_1$ şi $\mathcal{X}_1^\perp$ sunt invariante la T şi $T^\star$.
Primele două proprietăţi sunt evidente. Subspaţiul $\mathcal{X}_1$ este invariant şi la T şi la $T^\star$ deoarece u_1 este vector propriu atât pentru T cât şi pentru $T^\star$. Conform lemei 27, rezultă că subspaţiul $\mathcal{X}_1^\perp$ este şi el invariant pentru operatorii T şi $T^\star$. Considerăm restricţiile operatorilor T şi $T^\star$ la subspaţiul $\mathcal{X}_1^\perp$:

$$T|_{\mathcal{X}_1^\perp} : \mathcal{X}_1^\perp \to \mathcal{X}_1^\perp,$$

$$T^\star|_{\mathcal{X}_1^\perp} : \mathcal{X}_1^\perp \to \mathcal{X}_1^\perp.$$

Aplicând acum lema 26 operatorilor $T|_{\mathcal{X}_1^\perp}$ şi $T^\star|_{\mathcal{X}_1^\perp}$, (care comută între ei), rezultă că există $u_2 \in \mathcal{X}_1^\perp$ care este vector propriu comun operatorilor T şi $T^\star$. Fie $\mathcal{X}_2$ subspaţiul liniar generat de vectorii u_1 şi u_2 şi fie $\mathcal{X}_2^\perp$ ortogonalul său. Deoarece vectorii u_1 şi u_2 sunt perpendiculari
(din construcţie), rezultă că dimensiunea spaţiului $\mathcal{X}_2$ este 2; cu un raţionament analog celui de mai sus, se demonstrează că subspaţiile $\mathcal{X}_2$ şi $\mathcal{X}_2^\perp$ sunt invariante la T şi $T^\star$. Repetând acum construcţia anterioară (considerăm restricţiile operatorilor T şi $T^\star$ la subspaţiile $\mathcal{X}_2$ şi $\mathcal{X}_2^\perp$, etc), obţinem o mulţime $\{u_1, u_2, .., u_n\}$ cu proprietăţile:
(i) $u_\imath \perp u_\jmath$, $\forall \imath \neq \jmath$.
(ii) $u_\imath$ este vector propriu pentru operatorii T şi $T^\star$, $\forall \imath \in \{1, 2, .., n\}$.
Considerând acum

$$v_\imath = \| u_\imath \|^{-1} u_\imath, \forall \imath \in \{1, 2, .., n\},$$

rezultă că mulţimea $\{v_1, v_2, .., v_n\}$ este o bază ortonormală a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T (şi ai lui $T^\star$), ceea ce încheie demonstraţia.

Înainte de a enunţa o primă consecinţă importantă a teoremei de mai sus, introducem o nouă clasă de operatori liniari.

29.Definiţie
Fie $\mathcal{X}$ un subspaţiu în C^n. Atunci, conform teoremei proiecţiei pe un subspaţiu

închis (consecinţa 10,cap.1), orice $x \in C^n$ admite o descompunere unică $x = y + z$ cu $y \in \mathcal{X}$ şi $z \in \mathcal{X}^{\perp}$. Considerăm operatorul (liniar)

$$P_{\mathcal{X}} : C^n \to C^n,\ P_{\mathcal{X}} x = y.$$

Operatorul $P_{\mathcal{X}}$ se numeşte **proiecţia** pe subspaţiul $\mathcal{X}$. Este evident că $P_{\mathcal{X}}^2 = P_{\mathcal{X}}$; se demonstrează de asemenea fără dificultate că $P_{\mathcal{X}}$ este autoadjunct. Un studiu aprofundat al operatorilor de proiecţie (pe un spaţiu Hilbert arbitrar) va fi prezentat în capitolul 5, paragraful 2. În cele ce urmează vom folosi următoarele proprietăţi (demonstraţiile sunt imediate). Dacă $\mathcal{X} \perp \mathcal{Y}$, atunci:
(i) $P_{\mathcal{X}} P_{\mathcal{Y}} = P_{\mathcal{Y}} P_{\mathcal{X}} = O$.
(ii) Operatorul sumă $P_{\mathcal{X}} + P_{\mathcal{Y}}$ este de asemenea proiecţie, subspaţiul de proiecţie corespunzător fiind suma (directă) a subspaţiilor $\mathcal{X}$ şi $\mathcal{Y}$.

30.Consecinţă (formula de descompunere spectrală pentru operatori normali)
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal şi fie $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_m$ valorile sale proprii (distincte). Fie, pentru orice $\imath \in \{1, 2, .., m\}$, $P_\imath$ operatorul de proiecţie pe subspaţiul vectorilor proprii asociaţi valorii proprii $\lambda_\imath$. Atunci:
(i) $P_\imath P_\jmath = O,\ \forall \imath \neq \jmath$.
(ii) $P_1 + P_2 + .. + P_m = I$.
(iii) $T = \lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + .. + \lambda_m P_m$.
Formula **(iii)** se numeşte **descompunerea spectrală** a lui T; în plus, această descompunere este unică.
Demonstraţie Prima relaţie este adevărată deoarece, conform propoziţiei 24, pentru un operator normal vectorii proprii corespunzători unor valori proprii distincte sunt ortogonali. Din teorema 28, rezultă că există o bază a lui C^n formată din vectori proprii ai operatorului T şi deci suma (directă) a tuturor subspaţiilor de vectori proprii este C^n; acest fapt justifică egalitatea **(ii)**. Pentru a demonstra formula de descompunere spectrală, fie, (ca în teorema 28(a)), $T = UDU^{-1}$, unde U este operator unitar, iar D este operator diagonal (matricea sa în baza canonică are pe diagonala principală valorile proprii ale lui T). Este evident că $D = \lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + .. + \lambda_m E_m$, unde, $E_\imath$ este proiecţia pe subspaţiul vectorilor proprii ai lui D asociaţi valorii proprii $\lambda_\imath$; reamintim că, în baza teoremei 20(a), vectorii din baza canonică sunt vectori proprii pentru D. Demonstraţia se încheie observând că

$$P_\imath = U E_\imath U^{-1}.$$

Lăsăm demonstraţia unicităţii ca exerciţiu.
Din demonstraţie rezultă de asemenea şi formula de descompunere spectrală

a adjunctului:

$$T^{\star} = \sum_{\imath=1}^{m} \overline{\lambda_{\imath}} P_{\imath}.$$

31.Observaţie
Deoarece operatorii autoadjuncţi şi operatorii unitari sunt în mod evident operatori normali, din teorema 28 rezultă că aceşti operatori sunt diagonalizabili în sens geometric; propunem cititorului să găsească o demonstraţie directă pentru teorema de diagonalizare a operatorilor autoadjuncţi.

În finalul acestui capitol vom da câteva aplicaţii remarcabile ale teoremelor 28 şi 30; pentru completări, recomandăm [9].

32.Observaţie
Se demonstrează fără dificultate următoarele implicaţii:
(i) Dacă T este operator autoadjunct, atunci valorile sale proprii sunt numere reale.
(ii) Dacă T este operator pozitiv, atunci valorile sale proprii sunt numere pozitive.
(iii) Dacă T este proiector, atunci $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.
(iv) Dacă T este operator unitar, atunci valorile sale proprii sunt numere complexe de modul 1.
Este remarcabil faptul că pentru operatorii normali sunt adevărate şi reciprocele acestor afirmaţii.

33.Teoremă
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal; atunci:
(i) T este operator autoadjunct dacă şi numai dacă valorile sale proprii sunt numere reale.
(ii) T este operator pozitiv dacă şi numai dacă valorile sale proprii sunt numere pozitive.
(iii) T este proiector dacă şi numai dacă $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$.
(iv) T este operator unitar dacă şi numai dacă valorile sale proprii sunt numere complexe de modul 1.
Menţionăm că există operatori (dar nu normali) care au toate valorile proprii reale, dar nu sunt autoadjuncţi, etc.
Demonstraţie Vom demonstra numai implicaţiile "$\Leftarrow$".
Fie, conform teoremei 30,

$$T = \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_{\imath} P_{\imath} \text{ şi } T^{\star} = \sum_{\imath=1}^{m} \overline{\lambda_{\imath}} P_{\imath},$$

descompunerile spectrale ale operatorilor (normali) T şi $T^\star$.
(i) Este clar că dacă $\lambda_\imath$ sunt numere reale, atunci T este autoadjunct.
(ii) Dacă $\lambda_\imath \geq 0$, atunci pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$< Tx, x >= \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath < P_\imath x, x >= \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath < P_\imath^2 x, x >=$$

$$= \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath < P_\imath x, P_\imath x >= \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath \parallel P_\imath x \parallel^2 \geq 0,$$

deci T este operator pozitiv.
(iii) Dacă $\sigma(T) \subseteq \{0, 1\}$, atunci operatorul T este suma unor proiecţii pe subspaţii ortogonale, deci este el însuşi o proiecţie.
(iv) Dacă $|\lambda_\imath| = 1$, $\forall \imath$, atunci:

$$TT^\star = \sum_{\imath=1}^{m} \sum_{\jmath=1}^{m} \lambda_\imath \lambda_\jmath P_\imath P_\jmath = \sum_{\imath=1}^{m} |\lambda_\imath|^2 P_\imath^2 = \sum_{\imath=1}^{m} P_\imath = I,$$

ceea ce arată că T este operator unitar.

34.Definiţie (calcul funcţional polinomial)
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ şi fie $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k z^k$ un polinom cu coeficienţi complecşi. O definiţie naturală pentru "valoarea lui p în T " este
$p(T) = \sum\limits_{k=0}^{m} a_k T^k$; în această formulă $T^0 = I$. Este uşor de demonstrat că pentru orice două polinoame p, q şi $\alpha, \beta \in C$, avem:
(i) $(\alpha p + \beta q)(T) = \alpha p(T) + \beta q(T)$.
(ii) $(pq)(T) = p(T)q(T)$.
Aplicaţia $p \to p(T)$ se numeşte **calculul funcţional** (polinomial) al operatorului T. Extinderea acestei aplicaţii la alte clase de funcţii este o problemă importantă.
Demonstrăm mai întâi legătura dintre calculul funcţional şi teorema de descompunere spectrală pentru operatori normali.

35.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal şi fie $T = \sum\limits_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath P_\imath$ descompunerea sa spectrală. Atunci, pentru orice polinom p, avem:

$$p(T) = \sum_{\imath=1}^{m} p(\lambda_\imath) P_\imath.$$

Demonstraţie Este suficient să demonstrăm că pentru orice $k \in N$, avem:

$$T^k = \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath^k P_\imath.$$

Deoarece $P_\imath P_\jmath = O$ dacă $\imath \neq \jmath$ şi $P_\imath^2 = P_\imath$, rezultă:

$$T^2 = \left(\sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath P_\imath\right)\left(\sum_{\jmath=1}^{m} \lambda_\jmath P_\jmath\right) = \sum_{\imath=1}^{m}\sum_{\jmath=1}^{m} \lambda_\imath \lambda_\jmath P_\imath P_\jmath = \sum_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath^2 P_\imath.$$

Egalitatea pentru k oarecare rezultă prin inducţie.

36.Definiţie (calcul funcţional)
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal având descompunerea spectrală $T = \sum\limits_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath P_\imath$ şi fie f o funcţie de variabilă complexă al cărei domeniu de definiţie include spectrul operatorului T. În acest caz definim:

$$f(T) = \sum_{\imath=1}^{m} f(\lambda_\imath) P_\imath.$$

Din propoziţia 35 rezultă că pentru funcţii polinomiale această definiţie coincide cu definiţia 34. Se verifică simplu următoarele proprietăţi:
(i) $(\alpha f + \beta g)(T) = \alpha f(T) + \beta g(T)$, (liniaritate),
(ii) $(fg)(T) = f(T)g(T)$, (multiplicativitate) $\forall \alpha, \beta \in C$ şi pentru orice funcţii f, g definite pe spectrul lui T.
Să observăm că din această definiţie rezultă că operatorul $f(T)$ este şi el normal, iar $\sum\limits_{\imath=1}^{m} f(\lambda_\imath) P_\imath$ este descompunerea sa spectrală.
De exemplu, dacă $f(z) = \overline{z}$, atunci $f(T) = T^\star$; Fie $g(z) = \frac{1}{z}$. Dacă operatorul T este şi inversabil (deci 0 nu este în spectrul său), atunci are sens $g(T)$; obţinem $g(T) = T^{-1}$.

O proprietate importantă a calculului funcţional este teorema de transformare a spectrului.

37. Teoremă (de transformare a spectrului)
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator normal şi fie f o funcţie definită pe spectrul lui T; atunci:

$$\sigma\left(f(T)\right) = \{f(\lambda)\,;\, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

Vom nota în continuare mulţimea din membrul drept al acestei egalităţi cu $f\left(\sigma(T)\right)$.
Demonstraţie Fie $T = \sum\limits_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath P_\imath$ descompunerea spectrală a operatorului T; atunci, din descompunerea spectrală $f(T) = \sum\limits_{\imath=1}^{m} f(\lambda_\imath) P_\imath$, rezultă că valorile proprii ale lui $f(T)$ sunt $f(\lambda_1), f(\lambda_2), .., f(\lambda_m)$, ceea ce încheie demonstraţia.

O aplicaţie remarcabilă a calculului funcţional este existenţa rădăcinii pătrate pozitive pentru operatori pozitivi.

38.Teoremă (rădăcina pătrată)
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator pozitiv. Atunci există un unic operator pozitiv $S \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât $T = S^2$; operatorul S se numeşte **rădăcina pătrată pozitivă** a lui T şi se notează cu $\sqrt{T}$.
Demonstraţie Deoarece T este operator pozitiv, avem incluziunea: $\sigma(T) \subseteq [0, \infty)$. Rezultă deci că funcţia radical $f(t) = \sqrt{t}$ este definită pe spectrul operatorului T; fie $S = f(T) = \sqrt{T}$. Fie $\mathrm{id}(t) = t$ funcţia identică. Deoarece $f^2 = $id, din multiplicativitatea calculului funcţional rezultă că $S^2 = \mathrm{id}(T) = T$.
Din teorema de transformare a spectrului rezultă că

$$\sigma(\sqrt{T}) = \{\sqrt{\lambda}\,;\ \lambda \in \sigma(T)\} \subset [0, \infty),$$

şi deci, conform teoremei 33(ii) operatorul $\sqrt{T}$ este pozitiv.
Unicitatea lui S rezultă din unicitatea formulei de descompunere spectrală; dacă $T = \sum\limits_{\imath=1}^{m} \lambda_\imath P_\imath$ este descompunerea spectrală a lui T, atunci

$$S = \sum_{\imath=1}^{m} \sqrt{\lambda_\imath} P_\imath = \sqrt{T}$$

este descompunerea spectrală a lui $\sqrt{T}$.

39.Consecinţă
Fie $A, B \in \mathcal{L}(C^n)$ doi operatori pozitivi; dacă $AB = BA$, atunci produsul AB este de asemenea pozitiv.
Pentru demonstraţie trebuie observat că dacă A şi B comută, atunci $\sqrt{A}$ şi $\sqrt{B}$ comută şi ei.

O aplicaţie interesantă a rădăcinii pătrate este existenţa unei descompuneri analoage descompunerii polare de la numere complexe. Se ştie că orice număr complex nenul z se poate scrie (în mod unic) sub forma $z = ru$, unde $r = |z| > 0$ şi $|u| = 1$.

40.Teoremă (descompunerea polară)
Pentru orice $T \in \mathcal{L}(C^n)$ există un unic operator pozitiv $P \in \mathcal{L}(C^n)$ şi un operator unitar (nu neapărat unic) $U \in \mathcal{L}(C^n)$ astfel încât $T = UP$. Dacă în plus operatorul T este inversabil, atunci U este unic determinat.
Demonstraţie Vom face mai întâi demonstraţia în ipoteza că T este inversabil, apoi vom trata cazul general. Fie $P = \sqrt{T^\star T}$ şi fie

$V = PT^{-1}$; atunci, dacă notăm $U = V^{-1}$, obţinem $T = UP$, unde P este un operator pozitiv. Mai avem de arătat că U este unitar. Pentru aceasta arătăm că V este unitar; deoarece $V^\star = (T^\star)^{-1}P$, rezultă:

$$V^\star V = (T^\star)^{-1}PPT^{-1} = (T^\star)^{-1}T^\star TT^{-1} = I,$$

şi deci V este unitar. Pentru a demonstra unicitatea lui P, să presupunem că $UP = T = U_oP_o$ este o altă descompunere polară a lui T. Din egalitatea $UP = U_oP_o$, prin trecere la adjuncţi rezultă $PU^\star = P_oU_o^\star$ şi deci:

$$P^2 = PU^\star UP = P_oU_o^\star U_oP_o = P_o^2.$$

Deoarece rădăcina pătrată pozitivă este unică, rezultă că $P = P_o$. Pentru a demonstra unicitatea lui U să observăm că dacă T este inversabil atunci şi $P = U^{-1}T$ este inversabil şi deci din egalitatea $UP = U_oP$ obţinem $U = U_o$. Considerăm acum cazul general; operatorul P se construieşte la fel: $P = \sqrt{T^\star T}$. Construim acum U; pentru aceasta, să observăm că pentru orice $x \in C^n$, avem:

$$\| Px \|^2 = < Px, Px > = < P^2x, x > = < T^\star Tx, x > = \| Tx \|^2 .$$

Definim operatorul U mai întâi pe subspaţiul $\mathrm{Im}(P)$ prin $U(Px) = Tx$, $\forall x \in C^n$. Definiţia este corectă, în sensul că dacă $Px_1 = Px_2$, atunci $Tx_1 = Tx_2$; pentru aceasta folosim egalitatea demonstrată mai sus:

$$0 = \| P(x_1 - x_2) \| = \| T(x_1 - x_2) \| .$$

Tot din egalitatea $\| Px \| = \| Tx \|$, rezultă că $U : \mathrm{Im}(P) \to \mathrm{Im}(T)$ este o izometrie:

$$\| U(Px) \| = \| Tx \| = \| Px \|, \forall x \in C^n.$$

De aici rezultă că subspaţiile $\mathrm{Im}(P)$ şi $\mathrm{Im}(T)$ au aceeaşi dimensiune (fiind izomorfe) şi deci şi ortogonalele lor au dimensiuni egale; fie

$$W : (\mathrm{Im}(P))^\perp \to (\mathrm{Im}(T))^\perp$$

o izometrie liniară arbitrară (există, deoarece cele două subspaţii sunt izomorfe). Prelungim U pe întregul C^n, punând $U = W$ pe $(\mathrm{Im}(P))^\perp$. Rezultă deci că U este o izometrie pe C^n, adică

$$\| Ux \| = \| x \|, \forall x \in C^n.$$

Conform observaţiei 19 rezultă că U este operator unitar; egalitatea $UP = T$ este de asemenea verificată şi deci demonstraţia este completă.

Variante infinit dimensionale ale rezultatelor de mai sus vor fi studiate în capitolul 5.

O consecinţă a teoremei de descompunere polară este şi următoarea formulă de schimbare de variabilă pentru măsura Lebesgue.

41.Teoremă
Fie μ măsura Lebesgue în R^n, fie $T \in \mathcal{L}(R^n)$ un operator inversabil şi fie $\det(T)$ determinantul matricei operatorului T (într-o bază arbitrară fixată). Atunci, pentru orice mulţime măsurabilă Lebesgue E, avem:

$$\mu(T(E)) = |\det(T)|\mu(E).$$

Demonstraţie Fie $\mathcal{M}$ familia mulţimilor măsurabile Lebesgue în R^n. Este evident că aplicaţia $\mu \circ T : \mathcal{M} \to [0, \infty]$ este o măsură invariantă la translaţii; din teorema de unicitate a măsurii Lebesgue în R^n ([3],p.325), rezultă că există o constantă $c(T) > 0$ astfel încât

$$(\mu \circ T)(E) = c(T)\mu(E), \forall E \in \mathcal{M}.$$

Fie D pătratul unitate din R^n, adică

$$D = \{(x_1, x_2, ..x_n) \in R^n \,;\, x_j \in [0, 1], \forall 1 \leq j \leq n\}.$$

Atunci, deoarece $\mu(D) = 1$, rezultă $c(T) = \mu(T(D))$. Vom demonstra în continuare că $c(T) = |\det(T)|$. Pentru aceasta, fie $S \in \mathcal{L}(R^n)$; pentru orice $E \in \mathcal{M}$, avem:

$$c(TS)\mu(E) = (\mu \circ TS)(E) = \mu(T(S(E))) =$$

$$= c(T)\mu(S(E)) = c(T)c(S)\mu(E),$$

deci am demonstrat egalitatea

$$c(TS) = c(T)c(S), \forall T, S \in \mathcal{L}(R^n).$$

Propunem ca exerciţiu egalitatea $c(W) = 1$, pentru orice operator unitar W. Operatorul T fiind inversabil, conform teoremei 41 el admite o unică descompunere polară $T = UA$, unde U este operator unitar, iar A este operator pozitiv şi inversabil. Operatorul A fiind pozitiv, el este şi normal, deci este diagonalizabil; ca urmare, există $V \in \mathcal{L}(R^n)$ un
operator unitar astfel încât operatorul $V^{-1}AV$ este diagonal. Rezultă deci (cf.teoremei 20) că vectorii bazei canonice sunt vectori proprii pentru $V^{-1}AV$, adică:

$$V^{-1}AVe_i = \lambda_i e_i, \forall 1 \leq i \leq n,$$

unde, $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ sunt valorile proprii (strict pozitive) ale lui A, iar $\{e_1, e_2, .., e_n\}$ este baza canonică din R^n. Fie

$$D_\lambda = \{(x_1, x_2, .., x_n) \in R^n \, ; \, 0 \leq x_i \leq \lambda_i, \, \forall i = 1, 2, .., n\}.$$

Atunci, din relaţia $(V^{-1}AV)\,(D) = D_\lambda$, obţinem:

$$c(A) = c(V^{-1})c(A)c(V) = c(V^{-1}AV) = c(V^{-1}AV)\mu(D) =$$

$$= \mu\left(V^{-1}AV(D)\right) = \mu\left(D_\lambda\right) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i.$$

Rezultă: $c(T) = c(U)c(A) = c(A) = \prod\limits_{i=1}^{n} \lambda_i = \det(A)$. Pentru orice mulţime măsurabilă Lebesgue E, avem:

$$\mu\left(T(E)\right) = c(T)\mu(E) = c(U)c(A)\mu(E) = c(A)\mu(E) =$$

$$= \det(A)\mu(E) = |\det(U)| \det(A)\mu(E) = |\det(T)|\mu(E).$$

Capitolul 3

Teoreme fundamentale de analiză funcţională

3.1 Operatori liniari şi continui pe spaţii normate

1.Definiţie
Fie $(X, \| \|)$ şi $(Y, \| \|)$ două spaţii normate (complexe). Reamintim că un **operator** $T : X \to Y$ se numeşte **liniar** dacă

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha T(x) + \beta T(y)\,,\ \forall \alpha, \beta \in C,\ \forall x, y \in X.$$

Operatorul T se numeşte **continuu în punctul** $x_o \in X$ dacă pentru orice $\epsilon > 0$ există $\delta > 0$ astfel încât pentru orice $x \in X$ cu proprietatea $\| x - x_o \| < \delta$, să avem $\| Tx - Tx_o \| < \epsilon$, sau, într-o formulare echivalentă (cu şiruri), dacă $\forall (x_n)_n \subset X$ cu proprietatea $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_o$, rezultă $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = Tx_o$. Operatorul T se numeşte **continuu** dacă este continuu în orice punct. Vom nota **mulţimea operatorilor liniari şi continui** de la X în Y cu $\mathcal{L}(X, Y)$. Dacă $X = Y$, vom nota această mulţime cu $\mathcal{L}(X)$. În capitolul 2 am studiat cazul $X = C^n$. Conform teoremei 13,cap.2, orice operator liniar pe C^n este continuu. Pe spaţii normate infinit dimensionale, există operatori liniari care nu sunt continui (a se vedea, de exemplu observaţia 42 din acest capitol).

2.Observaţie
Mulţimea $\mathcal{L}(X, Y)$ se poate organiza ca spaţiu vectorial cu operaţiile uzuale: $(T + S)(x) = Tx + Sx$ şi $(\alpha T)x = \alpha Tx$, pentru orice operatori $T, S \in \mathcal{L}(X)$ şi pentru orice $x \in X$, $\alpha \in C$.
Vom nota cu O operatorul nul şi cu $-T$ opusul lui T.

3.Propoziţie
Fie $(X, \| \|)$ şi $(Y, \| \|)$ două spaţii normate şi fie $T : X \to Y$ un operator liniar. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T este continuu în 0.
(b) T este continuu.
(c) Există $M > 0$ astfel încât $\| Tx \| \leq M \| x \|, \forall x \in X$.
(d) Pentru orice submulţime mărginită $A \subseteq X$, submulţimea $T(A) \subseteq Y$ este de asemenea mărginită.
Demonstraţie Implicaţia **(a)** $\Rightarrow$ **(b)** o propunem ca exerciţiu.
(b) $\Rightarrow$ **(c)**. Din continuitatea lui T în 0, (şi $T(0) = 0$), rezultă că pentru orice $\epsilon > 0$, există $\delta > 0$ astfel încât $\| Ty \| \leq \epsilon, \forall y \in X$ cu proprietatea $\| y \| \leq \delta$. Fie $x \in X$; atunci, scriind inegalitatea de mai sus pentru $\epsilon = 1$ şi $y = \delta \| x \|^{-1} x$, obţinem $\| Tx \| \leq \frac{1}{\delta} \| x \|$.
Implicaţia **(c)** $\Rightarrow$ **(d)** este şi ea evidentă.
(d) $\Rightarrow$ **(a)**. Fie $\epsilon > 0$ şi fie $\delta > 0$ astfel încât $\| \frac{\delta}{\epsilon} x \| \leq 1$. Din ipoteza **(d)** rezultă $\| T(\frac{\delta}{\epsilon} x) \| \leq \delta$; în concluzie, dacă $\| x \| \leq \frac{\epsilon}{\delta}$, rezultă că $\| Tx \| \leq \epsilon$, ceea ce arată că T este continuu în origine.

4.Definiţie
Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, definim:

$$\| T \| = \inf\{M > 0 \,;\, \| Tx \| \leq M \| x \|, \forall x \in X\};$$

$$\| T \|_1 = \sup\{\| Tx \| \,;\, x \in X \text{ şi } \| x \| = 1\};$$

$$\| T \|_2 = \sup\{\| Tx \| \,;\, x \in X \text{ şi } \| x \| \leq 1\}.$$

Să observăm că buna definiţie a lui $\| \|$ este asigurată de punctul (c) din propoziţia anterioară. Facem de asemenea precizarea că notaţiile $\| T \|_1$ şi $\| T \|_2$ vor fi folosite numai în cursul demonstraţiei lemei următoare.

5.Lemă
(a) Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, avem $\| T \| = \| T \|_1 = \| T \|_2$.
(b) Aplicaţia $T \to \| T \|$ este o normă pe spaţiul vectorial $\mathcal{L}(X, Y)$.
Demonstraţie (a) Demonstrăm mai întâi inegalitatea:

$$\| Tx \| \leq \| T \| \| x \|, \forall x \in X. \tag{3.1}$$

Fie $\mathcal{D} = \{M > 0 \,;\, \| Tx \| \leq M \| x \|, \forall x \in X\}$. Deoarece $\| T \| =$ $= \inf \mathcal{D}$, rezultă că există un şir $M_n \in \mathcal{D}$ astfel încât $\| T \| = \lim_{n\to\infty} M_n$ şi $\| T(x) \| \leq M_n \| x \|$. Din aceste două relaţii, rezultă, pentru $n \to \infty$, inegalitatea (3.1). Folosind acum (3.1), obţinem:

$$\| T \|_2 = \sup\{\| Tx \| \,;\, x \in X \text{ şi } \| x \| \leq 1\} \leq$$

$$\leq \sup\{\| T \| \| x \| \,;\, x \in X \text{ şi } \| x \| \leq 1\} = \| T \|,$$

şi deci am demonstrat :

$$\| T \|_2 \leq \| T \| \,. \tag{3.2}$$

Pentru orice $x \in X$, $x \neq 0$, vectorul $u = \| x \|^{-1} x$ are normă 1 şi deci:

$$\frac{1}{\| x \|} \| Tx \| = \| Tu \| \leq \sup\{\| Ty \| \,;\, y \in X \text{ şi } \| y \| = 1\} = \| T \|_1,$$

şi deci am demonstrat inegalitatea:

$$\| Tx \| \leq \| T \|_1 \| x \|, \tag{3.3}$$

pentru orice $x \in X$; (pentru $x = 0$, (3.3) este evidentă). Din (3.3) rezultă că $\| T \|_1 \in \mathcal{D}$ şi deci din definiţia lui $\| T \|$, rezultă:

$$\| T \|_1 \geq \| T \| \,. \tag{3.4}$$

Cum inegalitatea $\| T \|_1 \leq \| T \|_2$ este evidentă, din (3.2) şi (3.4) rezultă egalitatea de la punctul **(a)**.
(b) Dacă $\| T \| = 0$, atunci $Tu = 0$, $\forall u \in X$ cu proprietatea $\| u \| = 1$; fie $x \in X$, oarecare. Atunci $u = \| x \|^{-1} x$ are normă 1 şi deci Tu=0, adică $Tx = 0$ şi deci $T = O$. Celelalte 2 proprietăţi ale normei rezultă din proprietăţile corespunzătoare ale normelor din X şi Y.

6.Definiţie
Din Lema anterioară rezultă că $\mathcal{L}(X, Y)$ poate fi organizat ca spaţiu normat cu norma din definiţia 3. Atunci când nu se va specifica în mod explicit contrariul, pe spaţiul $\mathcal{L}(X, Y)$ se va subînţelege topologia definită de această normă.

7.Teoremă
Fie $(X, \| \|)$ şi $(Y, \| \|)$ spaţii normate. Dacă Y este complet, atunci $\mathcal{L}(X, Y)$ este spaţiu Banach.
Demonstraţie Fie T_n un şir Cauchy în $\mathcal{L}(X, Y)$, deci pentru orice $\epsilon > 0$, există $n_\epsilon \in N$ astfel încât

$$\| T_n - T_m \| < \epsilon \,,\, \forall n, m \geq n_\epsilon. \tag{3.5}$$

Din inegalitatea (3.1), aplicată operatorului $T_n - T_m$ şi din (3.5), rezultă:

$$\| T_n x - T_m x \| < \epsilon \| x \| \, , \forall n, m \geq n_\epsilon \, , \forall x \in X. \tag{3.6}$$

Din inegalitatea (3.6) rezultă că pentru orice $x \in X$ şirul $(T_n x)_{n\in N}$ este şir Cauchy în spaţiul Y, care, conform ipotezei, este complet. Fie deci $Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$, pentru orice $x \in X$. Liniaritatea operatorului T astfel definit este imediată. Demonstrăm acum continuitatea lui T. Din inegalitatea (3.6), pentru $m \to \infty$ rezultă:

$$\| T_n x - Tx \| \leq \epsilon \| x \|, \forall x \in X, \forall n \geq n_\epsilon. \tag{3.7}$$

Din propoziţia 3 (**b**$\Leftrightarrow$**c**) şi din inegalitatea (3.7) rezultă că operatorul $T_n - T$ este continuu şi deci $T = T_n - (T_n - T) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Tot din (3.7) şi din definiţia normei în $\mathcal{L}(X, Y)$ rezultă că $\| T_n - T \| \leq \epsilon$, $\forall n \in N$, ceea ce arată că şirul T_n este convergent la T.

8.Definiţie

Fie X un spaţiu normat. Orice aplicaţie $f : X \to C$ se numeşte funcţională (pe spaţiul X). Mulţimea funcţionalelor liniare şi continue se notează cu X' şi se numeşte **dualul** lui X. Deoarece spaţiul C este complet, din teorema precedentă (pentru $Y = C$) rezultă că X' este spaţiu Banach. Evident, aceeaşi construcţie i se poate aplica şi spaţiului X'; se obţine spaţiul Banach X'', (numit al doilea dual al lui X, sau **bidualul**). Dacă $x \in X$, atunci aplicaţia $\phi_x : X' \to C$, $\phi_x(f) = f(x)$, este în X'' şi $\| \phi_x \| = \| x \|$, ([4],p.120). In felul acesta, orice spaţiu Banach X este izomorf (în mod canonic) cu un subspaţiu din X''. Dacă în plus aplicaţia $X \ni x \to \phi_x \in X''$, este un izomorfism de spaţii Banach, atunci X se numeşte spaţiu **reflexiv** (în general această aplicaţie nu este surjectivă).

9.Observaţie

Din teorema lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe un spaţiu Hilbert H, rezultă că dacă $f \in H'$, $f(x) =< x, y_f >$, atunci $\| f \| = \| y_f \|$ şi deci aplicaţia $F : H' \to H$, $F(f) = y_f$ este o bijecţie cu proprietăţile : $F(f + g) = F(f) + F(g)$, $F(\alpha f) = \overline{\alpha} F(f)$ şi $\| F(f) \| = \| f \|$; este simplu de observat că H' se poate organiza ca spaţiu Hilbert cu produsul scalar $< f, g >= \overline{< F(f), F(g) >}$. Deşi F nu este un izomorfism de spaţii Hilbert (decât în cazul în care corpul scalarilor este R), în majoritatea situaţiilor este convenabilă identificarea lui H' cu H. O altă consecinţă imediată a teoremei lui Riesz este faptul că orice spaţiu Hilbert este reflexiv, ([4],p.166). Nu există o teoremă de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe un spaţiu Banach arbitrar; dăm în continuare caracterizările

dualelor unor spaţii Banach uzuale.

10.Exemplu

(i) Fie $\alpha \in \ell^\infty(Z)$, (a se vedea exemplele 4(ii) şi (iii) din capitolul 1); atunci aplicaţia

$$f_\alpha : \ell^1(Z) \to C,\ f_\alpha(x) = \sum_{n\in Z} \alpha(n)x(n)$$

este o functională liniară şi continuă pe spaţiul $\ell^1(Z)$ cu proprietatea

$$\| f_\alpha \| = \| \alpha \|_\infty .$$

Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă f pe spaţiul $\ell^1(Z)$, există $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât $f = f_\alpha$.

Demonstraţie Fie $\alpha \in \ell^\infty(Z)$ şi fie f_α ca în enunţ; este evident că f_α este liniară. Continuitatea sa rezultă din inegalitatea:

$$|f_\alpha(x)| = |\sum_{n\in Z} \alpha(n)x(n)| \le \left(\sum_{n\in Z} |x(n)|\right) \sup_{n\in Z} |\alpha(n)|,\ \forall x \in \ell^1(Z).$$

Tot de aici rezultă şi inegalitatea $\| f_\alpha \| \le \| \alpha \|_\infty$. Demonstrăm acum inegalitatea inversă. Pentru aceasta, fie $\sigma_k \in \ell^1(Z)$ definit prin:

$$\sigma_k(n) = \begin{cases} 1 & \text{dacă } n = k \\ 0 & \text{dacă } n \ne k \end{cases}$$

Evident, $\| \sigma_k \|_1 \le 1$, şi deci

$$\| f_\alpha \| = \sup\{|f_\alpha(y)\,;\ \| y \|_1 \le 1\} \ge |f_\alpha(\sigma_k)| = |\alpha(k)|.$$

Luând acum supremumul după k, rezultă $\| f_\alpha \| \ge \| \alpha \|_\infty$.

Demonstrăm acum afirmaţia reciprocă; fie f o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul $\ell^1(Z)$ şi fie σ_k definit mai sus.

Pentru orice $x \in \ell^1(Z)$, fie seria (de elemente din $\ell^1(Z)$), $\sum_{k\in Z} x(k)\sigma_k$. Este uşor de arătat că această serie converge în spaţiul $\ell^1(Z)$ la şirul x, deci

$$x = \sum_{k\in Z} x(k)\sigma_k.$$

Rezultă deci (folosind liniaritatea şi continuitatea lui f):

$$f(x) = \sum_{k\in Z} x(k)f(\sigma_k),\ \forall x \in \ell^1(Z).$$

Definim şirul $\alpha(k) = f(\sigma_k)$, $\forall k \in Z$; rezultă că $\| \alpha \|_\infty \leq \| f \|$ (deci α este mărginit) şi $f = f_\alpha$.
În mod analog se poate identifica şi dualul spaţiului $\ell^1(N)$ cu $\ell^\infty(N)$.
Prezentăm în continuare, fără demonstraţii, (ele pot fi găsite în [4],p.111), caracterizările dualelor altor spaţii Banach uzuale.

(ii) Dualul spaţiului $\ell^p(Z)$
Fie $p > 1$ şi fie $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dacă $\alpha \in \ell^q(Z)$, atunci aplicaţia

$$f_\alpha : \ell^p(Z) \to C,\ f_\alpha(x) = \sum_{n \in Z} \alpha(n) x(n),$$

este o funcţională liniară şi continuă cu proprietatea $\| f \| = \| \alpha \|_q$.
Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă f pe spaţiul $\ell^p(Z)$, există $\alpha \in \ell^q(Z)$ astfel încât $f = f_\alpha$.

(iii) Dualul spaţiului $L^1(\Omega, \mu)$
Fie (Ω, μ) un spaţiu cu măsură σ-finită, adică există o partiţie cel mult numărabilă a lui Ω, formată din mulţimi măsurabile $\{\mathcal{X}_n\}_{n \in N}$ astfel încât $\mu(\mathcal{X}_n) < \infty, \forall n \in N$.
Dacă $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, (a se vedea exemplele 4(i) şi (vi), capitolul 1), atunci funcţionala

$$F_\phi : L^1(\Omega, \mu) \to C,\ F_\phi(f) = \int_\Omega \phi(t) f(t) d\mu(t),$$

este o funcţională liniară şi continuă cu proprietatea $\| F_\phi \| = \| \phi \|_\infty$.
Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă F pe spaţiul $L^1(\Omega, \mu)$, există şi este unic $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ astfel încât $F = F_\phi$.

(iv) Dualul spaţiului $L^p(\Omega, \mu)$
Fie $p > 1$ şi $q > 1$ astfel încât $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.
Dacă $\phi \in L^q(\Omega, \mu)$, atunci funcţionala

$$F_\phi : L^p(\Omega, \mu) \to C,\ F_\phi(f) = \int_\Omega \phi(t) f(t) d\mu(t),$$

este o funcţinală liniară şi continuă cu proprietatea $\| F_\phi \| = \| \phi \|_q$.
Reciproc, pentru orice funcţională liniară şi continuă F pe spaţiul $L^p(\Omega, \mu)$, există şi este unic $\phi \in L^q(\Omega, \mu)$ astfel încât $F = F_\phi$.

11.Observaţie
Convergenţa în spaţiul normat $\mathcal{L}(X, Y)$ se numeşte **convergenţă uniformă**.

Pe mulţimea $\mathcal{L}(X,Y)$ se mai pot defini şi alte tipuri de convergenţă; spunem că şirul de operatori $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ converge **punctual** (sau **tare-operatorial**) la $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} T_n x = Tx\,,\ \forall x \in X;$$

spunem că şirul $T_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ converge **slab-operatorial** la operatorul $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ dacă

$$\lim_{n\to\infty} f(T_n x) = f(Tx)\,,\ \forall x \in X\,,\ \forall f \in X'.$$

Lăsăm ca exerciţiu cititorului afirmaţiile: convergenţa uniformă o implică pe cea punctuală, iar aceasta pe cea slabă, reciprocele fiind, în general, false.

12.Definiţie

Fie X, Y, Z trei spaţii normate şi fie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$ şi $S \in \mathcal{L}(Y,Z)$. Operatorul $ST \in \mathcal{L}(X,Z)$, definit prin $(ST)(x) = S(Tx)$ se numeşte **produsul** operatorilor S şi T. Să mai observăm că din inegalităţile :

$$\parallel STx \parallel \leq \parallel S \parallel \parallel Tx \parallel \leq \parallel S \parallel \parallel T \parallel \parallel x \parallel\,,\ \forall x \in X,$$

rezultă $\parallel ST \parallel \leq \parallel S \parallel \parallel T \parallel$. Să considerăm acum un operator $T \in \mathcal{L}(X)$. El se numeşte **inversabil** dacă există un alt operator $T^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ astfel încât $TT^{-1} = T^{-1}T = I$, unde, I este operatorul identic, adică $Ix = x\,,\ \forall x \in X$. Este simplu de observat că dacă T este bijectiv, atunci T^{-1} este liniar; în general însă, operatorul T^{-1} nu este continuu; dacă $X = C^n$ este un spaţiu finit dimensional, atunci T^{-1} este continuu în virtutea faptului că pe spaţii finit dimensionale orice aplicaţie liniară este şi continuă, rezultat demonstrat în teorema 13,cap.2. Un rezultat fundamental în această direcţie este teorema aplicaţiei deschise (pe care o vom demonstra în paragraful 4 al acestui capitol). Prezentăm în continuare două rezultate referitoare la inversabilitatea operatorilor liniari şi continui.

13.Propoziţie

Fie X, Y două spaţii normate şi fie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Dacă T este bijectiv, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T^{-1} este operator continuu.
(b) Există $m > 0$ astfel încât $\parallel Tx \parallel \geq m \parallel x \parallel\,,\ \forall x \in X$. In acest caz, are loc inegalitatea $\parallel T^{-1} \parallel \leq m^{-1}$.
Un operator arbitrar (nu neapărat bijectiv) care satisface condiţia **(b)** se numeşte **mărginit inferior**. Este evident că un operator mărginit inferior este injectiv.
Demonstraţie (a)$\Rightarrow$ **(b)** Dacă T^{-1} este operator continuu, atunci, conform

propoziţiei 3, există $M > 0$ astfel încât $\| T^{-1}y \| \leq M \| y \|$,
$\forall y \in Y$. Notând $x = T^{-1}y \in X$, rezultă $\| x \| \leq M \| Tx \|$, $\forall x \in X$ şi deci luând $m = M^{-1}$ relaţia **(b)** este verificată.
(b)$\Rightarrow$ **(a)** Fie $x \in X$ şi fie $y = Tx$; din ipoteză avem:

$$\| T^{-1}y \| = \| x \| \leq \frac{1}{m} \| Tx \| = \frac{1}{m} \| y \|,$$

deci conform propoziţiei 3 operatorul T^{-1} este continuu şi avem
$\| T^{-1} \| \leq m^{-1}$.

14.Propoziţie
Fie X un spaţiu Banach şi fie $T \in \mathcal{L}(X)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T este inversabil;
(b) T este mărginit inferior şi subspaţiul $\mathrm{Im}(T) = \{Tx\,;\, x \in X\}$ este dens în X.
Demonstraţie (a) $\Rightarrow$ **(b)** Dacă T este inversabil, atunci T este surjectiv, deci $\mathrm{Im}(T) = X$. Pentru orice $x \in X$, avem:

$$\| Tx \| \geq \frac{1}{\| T^{-1} \|} \| T^{-1}Tx \| = \frac{1}{\| T^{-1} \|} \| x \|,$$

şi deci T este mărginit inferior. Să observăm de asemenea că din inegalitatea de mai sus rezultă şi $\| T^{-1} \| \geq \| T \|^{-1}$.
(b) $\Rightarrow$ **(a)** Fie, conform ipotezei, $m > 0$ astfel încât
$\| Tx \| \geq m \| x \|$, $\forall x \in X$ şi fie $(Tx_n)_n \subset \mathrm{Im}(T)$ un şir Cauchy. Din inegalitatea anterioară rezultă că pentru orice $n, m \in N$ avem: $\| x_n - x_m \| \leq m^{-1} \| Tx_n - Tx_m \|$, şi deci $(x_n)_n$ este şir Cauchy în X care este complet. Fie deci $x = \lim_{n\to\infty} x_n$. Din continuitatea lui T rezultă $\lim_{n\to\infty} Tx_n = Tx$, ceea ce arată că $\mathrm{Im}(T)$ este subspaţiu închis în X. Cum din ipoteză $\mathrm{Im}(T)$ este dens, rezultă că T este surjectiv, deci T este bijectiv. Continuitatea lui T^{-1} rezultă acum din propoziţia 13.

3.2 Teorema Hahn-Banach

15.Definiţie
Fie X un spaţiu vectorial real sau complex. O funcţională $p : X \to R$ se numeşte **subliniară** dacă $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ şi $p(\alpha x) = \alpha p(x)$, pentru orice $x, y \in X$ şi $\alpha \geq 0$. Din definiţie rezultă imediat proprietăţile $p(0) = 0$ şi $-p(-x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.

În demonstraţia teoremei principale din acest paragraf (teorema Hahn-Banach) vom folosi lema lui Zorn, pe care o reamintim în continuare.

16.Lema lui Zorn
Fie $(\mathcal{A}, \leq)$ o mulţime (parţial) ordonată. O submulţime $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ se numeşte **total ordonată** dacă $\forall a, b \in \mathcal{B}$, atunci $a \leq b$ sau $b \leq a$. Se numeşte **majorant** al mulţimii $\mathcal{B}$ orice element $c \in \mathcal{A}$ astfel încât
$a \leq c\,, \forall a \in \mathcal{B}$. Spunem că $m \in \mathcal{A}$ este un **element maximal** al lui $\mathcal{A}$ dacă pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea $m \leq x$, rezultă $x = m$. Mulţimea $\mathcal{A}$ se numeşte **inductiv ordonată** dacă orice submulţime total ordonată a lui $\mathcal{A}$ admite majoranţi.

Lema lui Zorn afirmă că orice mulţime nevidă inductiv ordonată admite un element maximal; [2],p.3; [4],p.8.

18.Teorema Hahn-Banach
Fie X un spaţiu vectorial real şi fie p o funcţională subliniară pe X. Fie Y un subspaţiu în X şi fie $g : Y \to R$, o funcţională liniară cu proprietatea $g(x) \leq p(x)\,, \forall x \in Y$. Atunci există $f : X \to R$, o funcţională liniară cu proprietăţile: $f(x) = g(x)\,, \forall x \in Y$ şi
$f(x) \leq p(x)\,, \forall x \in X$.
Se spune că f prelungeşte pe g la întreg spaţiul cu păstrarea inegalităţii $f(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.
Demonstraţie În cele ce urmează, dacă h este o funcţională liniară, vom nota cu $D(h)$ subspatiul din X pe care este ea definită. Notaţia $g \preceq h$ va însemna că h este o funcţională liniară cu proprietăţile
$D(h) \supseteq Y$, $h(y) = g(y)$, $\forall y \in Y$ şi $h(x) \leq p(x)\,, \forall x \in D(h)$. Fie:

$$\mathcal{A} = \{h : D(h) \to R\,;\, g \preceq h\}.$$

Mulţimea $\mathcal{A}$ este nevidă deoarece îl conţine pe g. Se demonstrează fără dificultate că $\mathcal{A}$ este inductiv ordonată; fie f elementul maximal dat de Lema lui Zorn. Demonstraţia se încheie dacă $D(f) = X$. Presupunem prin absurd că există $a \in X - D(f)$. Construim funcţionala
$h : D(h) = D(f) + aR \to R\,, h(x + at) = f(x) + \alpha t$, unde, α este o constantă reală neprecizată încă. Vom demonstra că putem alege α astfel încât $h \in \mathcal{A}$, ceea ce ar constitui o contradicţie cu maximalitatea lui f (incluziunea $D(h) \supset D(f)$ este, în mod evident, strictă). Relaţia pe care trebuie să o satisfacă α pentru ca $h \in \mathcal{A}$ este:

$$f(x) + \alpha t \leq p(x + \alpha t)\,, \forall x \in D(f), \forall t \in R,$$

sau, echivalent

$$f(x) - p(x-a) \le p(x+a) - f(x), \tag{3.8}$$

pentru orice $x \in D(f)$. Din ipoteză, pentru orice $x, y \in D(f)$ avem:

$$f(x) + f(y) \le p(x+y) \le p(x+a) + p(y-a),$$

deci pentru orice $x, y \in D(f)$,avem:

$$f(y) - p(y-a) \le p(x+a) - f(x),$$

ceea ce arată că există $\alpha \in R$ cu proprietatea (3.8).

19.Corolar

Fie X un spaţiu vectorial real şi p o funcţională subliniară pe X. Atunci, pentru orice $x_o \in X$ există o funcţională liniară f pe X astfel încât $f(x_o) = p(x_o)$ şi $f(x) \le p(x)\,, \forall x \in X$.
Pentru demonstraţie, se aplică teorema Hahn-Banach pentru
$Y = \{\alpha x_o\,;\, \alpha \in R\}$ şi $g(\alpha x_o) = \alpha p(x_o)$.

O problemă importantă de geometrie în a cărei rezolvare teorema Hahn-Banach este un instrument esenţial este separarea submulţimilor nevide, convexe şi disjuncte dintr-un spaţiu normat.

20.Definiţie

Fie $(X, \|\ \|)$ un spaţiu normat (real) şi fie $f : X \to R$ o funcţională liniară neidentic nulă. Pentru orice $\alpha \in R$, mulţimea:

$$Y(f, \alpha) = \{x \in X\,;\, f(x) = \alpha\}$$

se numeşte **hiperplanul** de ecuaţie $f = \alpha$.

Propunem ca exerciţiu afirmaţia: hiperplanul $Y(f, \alpha)$ este submulţime închisă în X dacă şi numai dacă funcţionala f este continuă.

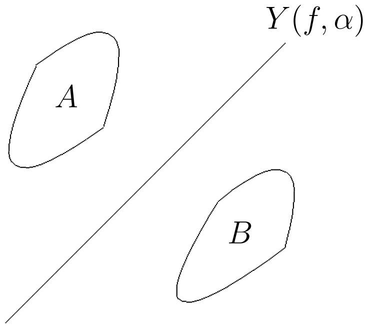
Fie A şi B două submulţimi nevide în X. Spunem că hiperplanul $Y(f, \alpha)$ **separă nestrict** A de B dacă:

$$f(x) \le \alpha,\ \forall x \in A \text{ şi } f(x) \ge \alpha,\ \forall x \in B.$$

Spunem că hiperplanul $Y(f, \alpha)$ **separă strict** A de B dacă există $\epsilon > 0$ astfel încât:

$$f(x) \le \alpha - \epsilon,\ \forall x \in A \text{ şi } f(x) \ge \alpha + \epsilon,\ \forall x \in B.$$

Din punct de vedere geometric, separarea înseamnă că A şi B se găsesc ”de o parte şi de alta a lui $Y(f, \alpha)$”.



21.Teoremă
Fie X un spaţiu normat (real) şi fie $A \subset X$ şi $B \subset X$ două submulţimi nevide, convexe şi disjuncte.
(a) Dacă A este submulţime deschisă, atunci există o funcţională liniară şi continuă f pe X şi $\alpha \in R$ astfel încât hiperplanul (închis) $Y(f, \alpha)$ separă nestrict A de B.
(b) Dacă A este submulţime închisă şi B este compactă, atunci există o funcţională liniară şi continuă f pe X şi $\alpha \in R$ astfel încât hiperplanul (închis) $Y(f, \alpha)$ separă strict A de B.
Demonstraţie (a) Vom face demonstraţia în trei etape.

Etapa I. Fie $K \subset X$ o submulţime convexă astfel încât $0 \in K$. Atunci aplicaţia:
$$p : X \to R,\, p(x) = \inf\{a > 0\,;\, a^{-1}x \in K\},$$
este o funcţională subliniară pe X astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea $0 \leq p(x) \leq M \parallel x \parallel, \forall x \in X$. În plus, are loc egalitatea:
$$K = \{x \in X\,;\, p(x) < 1\}.$$
Pentru orice $\rho > 0$, vom nota cu $B(0, \rho)$ bila deschisă de centru 0 şi rază ρ din X. Fie $r > 0$ astfel încât $B(0, r) \subset K$; este evident că $p(x) \leq r^{-1} \parallel x \parallel, \forall x \in X$, deci putem lua $M = r^{-1}$. Faptul că $p(tx) = tp(x), \forall x \in X, \forall t > 0$, este evident. Demonstrăm acum prin dublă incluziune egalitatea $K = \{x \in X\,;\, p(x) < 1\}$. Dacă $x \in K$, atunci, (deoarece K este mulţime deschisă), există $\epsilon > 0$ (suficient de mic) astfel încât $(1 + \epsilon)x \in K$, deci $p(x) \leq (1 + \epsilon)^{-1} < 1$. Invers, dacă $p(x) < 1$, atunci există $t \in (0, 1)$ astfel încât $t^{-1}x \in K$, deci $x = t(t^{-1}x) + (1 - t)0 \in K$.

Demonstrăm acum proprietatea $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$, $\forall x, y \in X$.
Fie $x, y \in X$ şi $\epsilon > 0$. Din egalitatea $K = \{x \in X\,;\, p(x) < 1\}$, rezultă:

$$\frac{x}{p(x)+\epsilon} \in K \text{ şi } \frac{y}{p(y)+\epsilon} \in K,$$

şi deci, deoarece K este convexă, rezultă:

$$\frac{tx}{p(x)+\epsilon} + \frac{(1-t)y}{p(y)+\epsilon} \in K, \ \forall t \in [0,1].$$

În particular, pentru $t = (p(x)+p(y)+2\epsilon)^{-1}(p(x)+\epsilon)$, obţinem:

$$\frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\epsilon} \in K,$$

şi deci $p(x+y) < p(x)+p(y)+2\epsilon$, ceea ce încheie demonstraţia primei etape.

Etapa a II-a Fie $K \subset X$ o submulţime nevidă, convexă şi deschisă şi fie $x_o \in X$ astfel încât $x_o \notin K$. Atunci există o funcţională liniară şi continuă $f : X \to R$, astfel încât $f(x) < f(x_o)$, $\forall x \in K$. În particular, hiperplanul (închis) $Y\,(f, f(x_o))$ separă nestrict $\{x_o\}$ de K.
Putem presupune, fără a restrânge generalitatea că $0 \in K$ (făcând eventual o translaţie). Fie p funcţionala subliniară introdusă în etapa I, adică $p(x) = \inf\{a > 0\,;\, a^{-1}x \in K\}$. Considerăm subspaţiul vectorial generat de x_o: $\mathcal{V} = \{tx_o\,;\, t \in R\}$. Fie $g : \mathcal{V} \to R$, $g(tx_o) = t$. Este evident că g este o funcţională liniară şi că ea verifică inegalitatea
$g(x) \leq p(x)$, $\forall x \in \mathcal{V}$. Conform teoremei Hahn-Banach, există o funcţională liniară $f : X \to R$ astfel încât

$$f(x) = g(x),\ \forall x \in \mathcal{V} \text{ şi } f(x) \leq p(x),\ \forall x \in X.$$

Din etapa I, avem că $f(x) \leq p(x) \leq M \parallel x \parallel$, $\forall x \in X$, deci f este continuă. De asemenea, $f(x_o) = 1$ şi deci, folosind egalitatea (demonstrată în etapa I) $K = \{x \in X\,;\, p(x) < 1\}$, rezultă $f(x) < 1$, $\forall x \in K$.

Etapa a III-a Demonstrăm acum enunţul teoremei. Fie A şi B ca în enunţ şi fie $K = \{x - y\,;\, x \in A,\, y \in B\}$. Este simplu de arătat că mulţimea K este convexă şi deschisă şi $0 \notin K$. Conform celor demonstrate în etapa a II-a, (pentru $x_o = 0$), există o funcţională liniară şi continuă $f : X \to R$, astfel încât $f(u) < 0$, $\forall u \in K$, adică:

$$f(x) < f(y),\ \forall x \in A,\ \forall y \in B.$$

De aici rezultă că există $\alpha \in R$ astfel încât

$$\sup_{x \in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y \in B} f(y),$$

ceea ce arată că hiperplanul (închis) $Y(f, \alpha)$ separă nestrict A de B.
(b) Fie A şi B ca în enunţ şi fie $\epsilon > 0$, suficient de mic, astfel încât mulţimile:

$$A_\epsilon = A + B(0, \epsilon) \text{ şi } B_\epsilon = B + B(0, \epsilon)$$

să fie disjuncte şi deschise. Cum A_ϵ şi B_ϵ sunt şi nevide şi convexe, din **(a)** rezultă că există un hiperplan $Y(f, \alpha)$ care separă nestrict A_ϵ de B_ϵ, adică:

$$f(x + \epsilon u) \leq \alpha \leq f(y + \epsilon u), \forall x \in A, \forall y \in B, \forall u \in B(0, 1).$$

Deoarece $f(z) \leq \| f \|$, $\forall z \in B(0, 1)$, rezultă:

$$f(x) + \epsilon \| f \| \leq \alpha \leq f(y) - \epsilon \| f \|, \forall x \in A, \forall y \in B,$$

ceea ce arată că hiperplanul $Y(f, \alpha)$ separă strict A de B întrucât f nu este identic nulă.

În încheiere, menţionăm că în R^n două mulţimi nevide, disjuncte şi convexe se pot separa nestrict întotdeauna (fără alte ipoteze suplimentare):[16],p.211. Pentru completări în legătură cu acest subiect, recomandăm [2],p.4.

Revenim acum la problema prelungirii funcţionalelor liniare şi studiem cazul spaţiilor vectoriale complexe.

22.Observaţie
Dacă X este un spaţiu vectorial complex şi p este o seminormă pe X, atunci p este şi funcţională subliniară; în plus, următoarele relaţii se verifică imediat:

$$p(-x) = p(x) \text{ şi } |p(x) - p(y)| \leq p(x - y).$$

Demonstrăm în continuare teorema Hahn-Banach pentru spaţii vectoriale complexe.

23.Teoremă
Fie X un spaţiu vectorial complex, p o seminormă pe X şi $Y \subseteq X$ un subspaţiu vectorial. Atunci, pentru orice funcţională liniară $g : Y \to C$ astfel încât $|g(x)| \leq p(x)$, $\forall x \in Y$, există o funcţională liniară $f : X \to C$ cu proprietăţile:

$$f(x) = g(x) \, , \forall x \in Y \text{ şi } |f(x)| \leq p(x) \, , \forall x \in X.$$

Demonstraţie Fie $g : Y \to C$ ca în enunţ şi fie g_1 , $g_2 : Y \to R$, funcţionale liniare reale astfel încât $g(x) = g_1(x) + ig_2(x)$. Atunci, explicitând egalitatea $g(ix) = ig(x)$, obţinem $g_1(ix) = -g_2(x)$, deci $g(x) = g_1(x) - ig_1(x)$. În plus, din ipoteză rezultă $|g_1(x)| \leq p(x)$,
$\forall x \in Y$. Aplicând teorema Hahn-Banach (cazul real) funcţionalei reale g_1 rezultă că există $f_1 : X \to R$ funcţională liniară reală astfel încât $f_1(x) = g_1(x)$, $\forall x \in Y$ şi $f_1(x) \leq p(x)$, $\forall x \in X$.
Definim $f : X \to C$, $f(x) = f_1(x) - if_1(ix)$; se demonstrează prin calcul direct că f satisface concluzia teoremei.
Prezentăm în continuare câteva consecinţe (pe spaţii normate) ale teoremei Hahn-Banach.

24.Corolar
Fie $(X, \| \|)$ un spaţiu normat complex şi fie $Y \subseteq X$ un subspaţiu. Atunci, pentru orice funcţională liniară şi continuă $g : Y \to C$ există $f \in X'$ astfel încât

$$f(x) = g(x)\,,\ \forall x \in Y \text{şi} \parallel f \parallel = \sup\{|g(x)|\,;\, x \in Y\,,\, \parallel x \parallel \leq 1\}.$$

Demonstraţie Fie $m = \sup\{|g(x)|\,;\, x \in Y\,,\, \parallel x \parallel \leq 1\}$ şi fie
$p : X \to R$, $p(x) = m \parallel x \parallel$. Aplicând teorema Hahn-Banach funcţionalei g şi seminormei p, demonstraţia se încheie.

25.Corolar
Fie $(X, \| \|)$ un spaţiu normat. Atunci, pentru orice $x_o \in X$ există $f_o \in X'$ astfel încât:

$$\parallel f_o \parallel = \parallel x_o \parallel \ \text{ şi } f_o(x_o) = \parallel x_o \parallel^2 .$$

În particular, dacă $f(x_o) = 0$, $\forall f \in X'$, atunci $x_o = 0$.
Demonstraţie Se aplică corolarul precedent pentru
$Y = \{\alpha x_o\,;\, \alpha \in C\}$ şi $g(\alpha x_o) = \alpha \parallel x_o \parallel^2$.

26.Corolar
Fie $(X, \| \|)$ un spaţiu normat. Atunci, pentru orice $x \in X$, are loc egalitatea:

$$\parallel x \parallel = \sup\{\, |f(x)|\,;\, f \in X' \text{ şi } \parallel f \parallel = 1\}.$$

În plus, există $f_x \in X'$ astfel încât $\parallel x \parallel = |f_x(x)|$.
În particular, dacă $X = (H, <\,,\,>)$ este un spaţiu Hilbert, atunci, din teorema lui Riesz (teorema 13,cap.1), rezultă egalitatea:

$$\parallel x \parallel = \sup\{| < x, y > |\,;\, y \in H,\, \parallel y \parallel = 1\}.$$

Demonstraţie Fie $x \in X$ şi fie $f \in X'$ astfel încât $\| f \| = 1$.
Din inegalitatea $|f(x)| \leq \| f \| \| x \| = \| x \|$, rezultă

$$\| x \| \geq \sup\{ |f(x)| \,;\, f \in X' \text{ şi } \| f \| = 1\}.$$

Din corolarul 25, rezultă existenţa unei funcţionale $h_x \in X'$ astfel încât $\| h_x \| = \| x \|$ şi $h_x(x) = \| x \|^2$; fie $f_x = \| x \|^{-1} h_x$. Atunci $\| f_x \| = 1$ şi $f_x(x) = \| x \|$, ceea ce încheie demonstraţia.

27.Observaţie
Din corolarul 26 rezultă că dacă X, Y sunt spaţii normate şi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, atunci :

$$\| T \| = \sup\{ |g(Tx)| \,;\, x \in X \,,\, \| x \| \leq 1 \,,\, g \in Y' \,,\, \| g \| \leq 1\}.$$

În particular, dacă $X = Y = (H, <\,,\,>)$ este un spaţiu Hilbert, atunci, din teorema lui Riesz, rezultă egalitatea:

$$\| T \| = \sup\{| < Tx, y > | \,;\, x, y \in H, \| x \| \leq 1, \| y \| \leq 1\}.$$

28.Corolar
Fie X un spaţiu normat şi fie $Y \subset X$ un subspatiu care nu este dens în X, adică $\overline{Y} \neq X$. Atunci există o funcţională neidentic nulă $f \in X'$ astfel încât $f(x) = 0 \,,\, \forall x \in Y$.
Demonstraţie Vom face demonstraţia pentru cazul real. Considerăm ca funcţională subliniară distanţa la subspaţiul Y : $p(x) = \mathrm{dist}(x, Y) =$
$= \inf\{ \| x - y \| \,;\, y \in Y\}$. Evident, $p(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \overline{Y}$. Fie $x_o \in X - \overline{Y}$; conform corolarului 19, există $f \in X'$ astfel încât $f(x_o) = p(x_o)$ şi $f(x) \leq p(x) \,,\, \forall x \in X$, ceea ce încheie demonstraţia.
Definim în continuare adjunctul unui operator liniar şi continuu între două spaţii Banach.

29.Teoremă
Fie X, Y spaţii normate. Pentru orice $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ există şi este unic $T^\star \in \mathcal{L}(Y', X')$ astfel încât $g(Tx) = (T^\star g)(x) \,,\, \forall x \in X \,,\, \forall g \in Y'$.
În plus, are loc egalitatea $\| T^\star \| = \| T \|$.
În particular, dacă $X = Y = (H, <\,,\,>)$ este un spaţiu Hilbert, atunci, din teorema lui Riesz, rezultă egalitatea:

$$< Tx, y > = < x, T^\star y >, \forall x, y \in H.$$

Demonstraţie Fie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$; definim $T^\star : Y' \to X'$, $T^\star g = g \circ T$. Pentru orice $x \in X$, avem $(T^\star g)(x) = g(Tx)$, ceea ce arată că $T^\star$ este unic. Liniaritatea este imediată. Conform observaţiei 27, avem:

$$\| T \| = \sup\{ |(T^\star g)(x)| \, ; \, x \in X \, , \, \| x \| \leq 1 \, , \, g \in Y' \, , \, \| g \| \leq 1\} =$$

$$= \sup\{\| T^\star g \| \, ; \, g \in Y' \, , \, \| g \| \leq 1\} = \| T^\star \| \, .$$

30.Definiţie
Fie X, Y spaţii normate şi fie $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Operatorul $T^\star \in \mathcal{L}(Y', X')$ se numeşte adjunctul operatorului T. Este evident că aplicaţia
$\mathcal{L}(X,Y) \ni T \to T^\star \in \mathcal{L}(Y', X')$ este liniară.

31.Propoziţie
Fie X, Y spaţii Banach şi $T \in \mathcal{L}(X,Y)$. Atunci T are imagine densă în Y dacă şi numai dacă operatorul $T^\star$ este injectiv.
Demonstraţie Fie subspaţiul $\mathrm{Ker}(T^\star) = \{g \in Y' \, ; \, T^\star g = 0\}$; evident, $T^\star$ este injectiv dacă şi numai dacă $\mathrm{Ker}(T^\star) = \{0\}$. Din definiţia lui $T^\star$ rezultă :

$$\mathrm{Ker}(T^\star) = \{g \in Y' \, ; \, g(Tx) = 0 \, , \, \forall x \in X\}. \tag{3.9}$$

Din corolarul 28, rezultă că $\mathrm{Im}(T)$ este subspaţiu dens în Y dacă şi numai dacă:

$$\{g \in Y' \, ; \, g(Tx) = 0 \, , \, \forall x \in X\} = \{0\}. \tag{3.10}$$

Din relaţiile 3.9 şi 3.10 rezultă echivalenţa cerută.

3.3 Principiul mărginirii uniforme

Este simplu de arătat că limita punctuală (a se vedea observaţia 11) a unui şir de operatori liniari şi continui este un operator liniar; dacă domeniul de definiţie al operatorilor este spaţiu normat complet, atunci limita (punctuală) este şi continuă. Acest rezultat (nebanal) este cunoscut sub numele de Teorema Banach-Steinhaus (sau principiul mărginirii uniforme) şi constituie tema paragrafului care urmează.

32.Lema lui Baire
Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $(A_n)_{n \in N}$ un şir de submulţimi

închise ale lui X cu proprietatea $\text{Int}(A_n) = \emptyset$, $\forall n \in N$.
Atunci $\text{Int}(\bigcup_{n\in N} A_n) = \emptyset$; (am notat cu $\text{Int}(A)$ interiorul mulţimii A).
Demonstraţie Fie, pentru fiecare $n \in N$, $D_n = X - A_n$. Din ipoteză rezultă că pentru fiecare $n \in N$ mulţimea D_n este deschisă şi densă în X; concluzia lemei este echivalentă cu faptul că $\bigcap_{n\in N} D_{n\in N}$ este densă în X, sau, echivalent, pentru orice mulţime nevidă deschisă $E \subseteq X$, avem $E \bigcap (\bigcap_{n\in N} D_n) \neq \emptyset$. Fie $E \subseteq X$, E deschisă şi nevidă. Fie $x_o \in E$ şi fie $r_o > 0$ astfel încât $\overline{B}(x_o, r_o) \subseteq E$. Deoarece D_1 este deschisă şi densă în X, putem alege $x_1 \in B(x_o, r_o) \bigcap D_1$ şi $r_1 > 0$ astfel încât $\overline{B}(x_1, r_1) \subseteq B(x_o, r_o) \bigcap D_1$ şi $r_1 < \frac{r_o}{2}$. Repetând procedeul, obţinem două şiruri $(x_n)_n \subset X$ şi $(r_n)_n$, $r_n > 0$, cu proprietăţile:

$$\overline{B}(x_{n+1}, r_{n+1}) \subseteq B(x_n, r_n) \bigcap D_{n+1} \text{ şi } r_{n+1} < \frac{r_n}{2}, \forall n \in N.$$

Din inegalitatea $d(x_{n+p} - x_n) \leq 2^{-n} r_o$, $\forall n, p \in N$, rezultă că $(x_n)_n$ este şir Cauchy şi deci există $a = \lim_{n\to\infty} x_n$. Din construcţie, $a \in \overline{B}(x_n, r_n)$,
$\forall n \in N$, şi deci $a \in E \bigcap (\bigcap_{n\in N} D_n)$, ceea ce încheie demonstraţia.

33.Corolar
Fie (X, d) un spaţiu metric complet şi fie $(A_n)_{n\in N}$ un şir de submulţimi închise ale lui X astfel încât $\bigcup_{n\in N} A_n = X$; atunci există $p \in N$ astfel încât $\text{Int}(X_p) \neq \emptyset$.

Vom demonstra în continuare rezultatul principal al acestui paragraf.

34.Teorema Banach-Steinhaus
(Principiul mărginirii uniforme)
Fie X spaţiu Banach, fie Y un spaţiu normat şi fie $(T_j)_{j\in J}$ o familie de operatori liniari şi continui de la X la Y cu proprietatea

$$\sup\{\| T_j x \| ; j \in J\} < \infty , \forall x \in X.$$

Atunci:

$$\sup\{\| T_j \| ; j \in J\} < \infty.$$

Demonstraţie Pentru orice $n \in N$, considerăm mulţimea închisă
$A_n = \{x \in X ; \| T_j x \| \leq n , \forall j \in J\}$. Din ipoteză rezultă că
$\bigcup_{n\in N} A_n = X$, şi deci conform corolarului 33 există $p \in N$ astfel încât
$\text{Int}(X_p) \neq \emptyset$. Fie $x_p \in X_p$ şi $r > 0$ astfel încât $B(x_p, r) \subset X_p$.
Dacă $y \in X$ cu proprietatea $\| y \| < 1$, atunci $x_p + ry \in B(x_p, r)$ şi deci

$\| T_\jmath(x_p + ry) \| \leq p$, $\forall \jmath \in J$. De aici rezultă că pentru orice $\jmath \in J$ şi $y \in Y$ cu $\| y \| \leq 1$, avem:

$$| \; \| T_\jmath x_p \| - r \| T_\jmath y \| \; | \leq p.$$

Demonstraţia se încheie observând că din inegalitatea de mai sus rezultă:

$$\sup_{\|y\|\leq 1} \| T_\jmath y \| \leq \frac{1}{r}(p + \| T_\jmath x_p \|) < \infty \,, \; \forall \jmath \in J.$$

35.Observaţie
Concluzia teoremei anterioare este echivalentă cu existenţa unei constante $k > 0$ cu proprietatea :

$$\| T_\jmath x \| \leq k \| x \| \,, \; \forall x \in X \,, \; \forall \jmath \in J.$$

36.Corolar
Fie X, Y două spaţii Banach şi fie $T_n : X \to Y$ un şir de operatori liniari şi continui cu proprietatea că pentru orice $x \in X$ şirul $(T_n x)_{n\in N}$ este convergent; notând această limită cu Tx, avem:
(a) $\sup_{n\in N} \| T_n \| < \infty$.
(b) T este operator liniar şi continuu.
(c) $\| T \| \leq \liminf_{n\to\infty} \| T_n \|$.
Demonstraţie Şirul $(T_n x)_{n\in N}$ fiind convergent, este mărginit; afirmaţia **(a)** rezultă aplicând teorema 34. Este evident că T este liniar; continuitatea rezultă din observaţia 35. Inegalitatea **(c)** rezultă din relaţia $\| T_n x \| \leq \| T_n \| \| x \|$.

37.Corolar
Fie E un spaţiu Banach şi fie $A \subseteq E$. Dacă pentru orice $f \in E'$ mulţimea $f(A)$ este mărginită (în C), atunci mulţimea A este mărginită (în spatiul E).
Demonstraţie Aplicăm teorema 34, pentru $X = E'$, $Y = C$ şi $J = A$. Pentru fiecare $a \in A$, definim $T_a : E' \to C$, $T_a f = f(a)$; din ipoteză rezultă că pentru orice $f \in E'$ avem $\sup_{a\in A} |T_a f| < \infty$. Conform observaţiei 35, există $k > 0$ astfel încât:

$$| T_a f | \leq k \| f \| \,, \; \forall f \in E' \,, \; \forall a \in A,$$

şi deci $\| T_a \| \leq k$. Pe de altă parte, din corolarul 26, avem $\| a \| = \sup\{ |f(a)| \,; \; f \in E' \,, \; \| f \| \leq 1 \}$, ceea ce încheie demonstraţia.

38.Corolar
Fie E un spaţiu Banach şi fie $A \subseteq E'$ cu proprietatea că pentru orice $x \in E$ mulţimea $\{f(x)\,;\, f \in A\}$ este mărginită în C.
Atunci mulţimea A este mărginită (în spaţiul normat E').
Demonstraţie Aplicăm teorema 34 pentru $X = E$, $Y = C$ şi $J = A$; pentru orice $f \in A$, definim $T_f : E \to C$, $T_f x = f(x)$. Aplicând observaţia 35 familiei $(T_f)_{f \in J}$, demonstraţia se încheie.

3.4 Teorema aplicaţiei deschise şi teorema graficului închis

În acest paragraf sunt prezentate teoremele aplicaţiei deschise şi cea a graficului închis. Prima are drept consecinţă remarcabilă continuitatea inversului unui operator liniar continuu bijectiv între două spaţii Banach, iar a doua dă o condiţie echivalentă cu continuitatea.

39.Teorema aplicaţiei deschise
Fie X, Y două spaţii Banach şi fie $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dacă T este surjectiv, atunci există $k > 0$ astfel încât $\sup\limits_{\|x\|<1} \| Tx \| \geq k$.
Concluzia teoremei mai poate fi scrisă sub forma echivalentă:

$$\{y \in Y\,;\, \| y \| < k\} \subseteq \{Tx\,;\, x \in X\,,\, \| x \| < 1\}.$$

Demonstraţie Fie $B_X(0,1)$ bila unitate deschisă din X ; demonstrăm mai întâi că există $k > 0$ astfel încât:

$$\overline{T(B_X(0,1))} \supset B_Y(0,2k). \tag{3.11}$$

Pentru aceasta, fie $X_n = n\overline{T(B_X(0,1))}$; deoarece T este surjectiv, rezultă că $\bigcup\limits_{n \in N} X_n = Y$ şi deci, aplicând lema lui Baire (lema 32) rezultă $\mathrm{Int}(\overline{T(B_X(0,1))}) \neq \phi$. Putem alege deci $k > 0$ şi $y_o \in Y$ astfel încât:

$$B_Y(y_o, 4k) \subset \overline{T(B_X(0,1))}. \tag{3.12}$$

În particular, $y_o \in \overline{T(B_X(0,1))}$, deci există un şir $(x_n)_n \subset B_X(0,1)$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y_o$; în concluzie:

$$-y_o = \lim_{n\to\infty} T(-x_n) \in \overline{T(B_X(0,1))}. \tag{3.13}$$

Din relaţiile 3.12 şi 3.13 rezultă (prin adunare):

$$B_Y(0,1) \subset \overline{T(B_X(0,1))} + \overline{T(B_X(0,1))}. \quad (3.14)$$

Demonstrăm acum

$$\overline{T(B_X(0,1))} + \overline{T(B_X(0,1))} = 2\overline{T(B_X(0,1))}; \quad (3.15)$$

pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că $\overline{T(B_X(0,1))}$ este mulţime convexă. Fie $\lambda \in [0,1]$ şi $x, y \in B_X(0,1)$; avem:

$$\| \lambda x + (1-\lambda)y \| \leq \lambda \| x \| + (1-\lambda) \| y \| < \lambda + (1-\lambda) = 1$$

şi deci $\lambda Tx + (1-\lambda)Ty = T(\lambda x + (1-\lambda)y) \in T(B_X(0,1)$.
Din relaţiile 3.14 şi 3.15 rezultă incluziunea 3.11.
Demonstrăm în continuare incluziunea $T(B_X(0,1)) \supset B_Y(0,k)$, ceea ce, evident, încheie demonstraţia. Fie $y \in B_Y(0,k)$; vom construi $x \in B_X(0,1)$ astfel încât $Tx = y$. Din incluziunea 3.11, rezultă $y \in \overline{T(B_X(0,\frac{1}{2}))}$, deci:

$$\forall \epsilon > 0, \exists z \in B_X(0,\frac{1}{2}) \text{astfel încât } \| y - Tz \| < \epsilon. \quad (3.16)$$

In particular pentru $\epsilon = \frac{k}{2}$, există $z_1 \in X$ cu proprietăţile:

$$\| z_1 \| < \frac{1}{2} \text{ şi } \| y - Tz_1 \| < \frac{k}{2}.$$

Fie acum elementul $y - Tz_1 \in B_X(0,k)$. Repetând raţionamentul aplicat lui y şi luând în relaţia 3.16 $\epsilon = \frac{k}{4}$, rezultă că există $z_2 \in X$ cu proprietăţile:

$$\| z_2 \| < 2^{-2} \text{ şi } \| (y - Tz_1) - Tz_2 \| < 2^{-2}k.$$

Repetând procedeul, construim un şir $(z_n)_n \subset X$ cu proprietăţile:

$$\| z_n \| < 2^{-n} \text{ şi } \| y - T(z_1 + z_2 + .. + z_n) \| < 2^{-n}k\,, \forall n \in N. \quad (3.17)$$

Rezultă că seria $\sum_{n\in N} z_n$ este absolut convergentă şi deci (deoarece X este spaţiu Banach) este şi convergentă; fie $x \in X$ suma acestei serii. Din relaţia 3.17 rezultă că $x \in B_X(0,1)$ şi $Tx = y$, ceea ce încheie demonstraţia.
Teorema 39 are numeroase aplicaţii; prezentăm în continuare câteva consecinţe utilizate frecvent.

40.Corolar
Fie X, Y şi T ca în teorema anterioară. Atunci, imaginea prin T a oricărei

mulţimi deschise din X este mulţime deschisă în Y; o aplicaţie cu această proprietate se numeşte **aplicaţie deschisă**, ceea ce dă şi
numele teoremei 39: teorema aplicaţiei deschise.
Demonstraţie Fie $D \subseteq X$ o mulţime deschisă şi fie $y \in T(D)$. Fie $x \in D$ astfel încât $y = Tx$. Mulţimea D fiind deschisă, există $r > 0$ astfel încât $B_X(x, r) \subset D$, sau, echivalent, $x + B_X(0, r) \subset D$. Aplicând T ultimei incluziuni, obţinem $y + T(B_X(0, r)) \subset T(D)$. Conform teoremei 39, există $k > 0$ astfel încât $T(B_X(0, 1)) \supset B_Y(0, k)$, sau, ehivalent, $T(B_X(0, r)) \supset B_Y(0, rk)$. Adunând în ambii membri ai ultimei incluziuni y, rezultă $B_Y(y, rk) \subset y + T(B_X(0, r)) \subset T(D)$, ceea ce încheie demonstraţia.

41.Corolar (Teorema lui Banach)
Fie X, Y două spaţii Banach şi $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. Dacă T este operator bijectiv, atunci $T^{-1} \in \mathcal{L}(X, Y)$.
Acest rezultat fundamental se numeşte teorema lui Banach.
Demonstraţie Fie $0 \neq x \in X$ şi fie $y = \| x \|^{-1} x$. Din teorema 39 rezultă că există $k > 0$ astfel încât $\| Ty \| \geq k$ şi deci $\| Tx \| \geq k \| x \|$; din propoziţia 13 rezultă că operatorul T^{-1} este continuu, ceea ce încheie demonstraţia.

42.Corolar
Fie X un spatiu vectorial şi fie $\| \|_1$ şi $\| \|_2$ două norme pe X. Dacă $(X, \| \|_1)$ şi $(X, \| \|_2)$ sunt spaţii Banach şi dacă există $c > 0$ astfel încât $\| x \|_2 \leq c \| x \|_1$, pentru orice $x \in X$, atunci există $k > 0$ astfel încât $\| x \|_1 \leq k \| x \|_2$. Rezultă deci că cele două norme sunt echivalente (cf.definiţiei 1,cap.1).
Demonstraţie Aplicăm corolarul 41 astfel:
$X = (X, \| \|_1)$, $Y = (X, \| \|_2)$ şi $T = I$.

43.Definiţie
Fie X, Y două spaţii normate şi fie $T : X \to Y$.
Mulţimea $\mathcal{G}(T) = \{(x, Tx) \,;\, x \in X\}$ se numeşte graficul lui T.
Operatorul T se numeşte închis dacă graficul său este mulţime închisă (în $X \times Y$). Menţionăm că mulţimea $X \times Y$ este spaţiu topologic cu topologia produs ([3],p.111); o normă care defineşte topologia produs este $\| (x, y) \| = \| x \| + \| y \|$.
O bază de vecinătăţi ale unui punct $(x, y) \in X \times Y$ este formată din toate mulţimile de tipul $U \times V$, unde, $U \subseteq X$ este vecinătate a lui x iar $V \subseteq Y$ este vecinătate a lui y. Vom folosi în continuare următorul rezultat (teorema lui Tihonov):
Dacă X şi Y sunt spaţii compacte, atunci $X \times Y$ este de asemenea spaţiu compact; pentru demonstraţie şi alte completări în legătură cu topologia produs, recomandăm [3],p.116.

44.Observaţie

(a) T este operator închis dacă şi numai dacă pentru orice şir $(x_n)_n \subset X$ cu proprietăţile:

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} Tx_n = y$,

rezultă $y = Tx$.

(b) Evident, orice operator continuu este închis; să mai observăm că în cazul unui operator continuu, ipoteza **(ii)** de mai sus face parte din concluzie.

(c) Reciproca afirmaţiei **(b)** este, în general, falsă, după cum arată următorul exemplu, pe care-l propunem ca exerciţiu.

Fie $X = \{f : [0,1] \to C\,;\, f \text{ de clasă } C^1\}$, $Y = \{f : [0,1] \to C\,;\, f \text{continuă}\}$ şi fie $T : X \to Y$, $Tf = f'$ (derivata). Norma pe spaţiile X şi Y este norma supremum: $\| f \|_\infty = \sup\limits_{t\in[0,1]} | f(t) |$. Atunci T este operator liniar închis, dar nu este continuu.

Are loc, totuşi, următorul rezultat remarcabil.

45.Teorema graficului închis

Fie $(X, \| \|_1)$, $(Y, \| \|_2)$ doua spaţii Banach şi fie $T : X \to Y$ un operator liniar şi închis. Atunci T este continuu.

În exemplul 44 spaţiul X nu este complet.

Demonstraţie Vom folosi corolarul 42. Considerăm pe X următoarele două norme:$\| x \|_3 = \| x \|_1 + \| Tx \|_2$ şi $\| x \|_4 = \| x \|_1$. Din ipoteză,$(X, \| \|_4)$ este spaţiu Banach. Este evident că $\| x \|_4 \leq \| x \|_3$; pentru a aplica corolarul 42 mai trebuie demonstrat că $(X, \| \|_3)$ este spaţiu Banach. Fie $(x_n)_n$ un şir Cauchy în $(X, \| \|_3)$; atunci $(x_n)_n$ este şir Cauchy în $\| \|_1$ şi $(Tx_n)_n$ este şir Cauchy în $\| \|_2$. Rezultă că există $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$ (în norma $\| \|_1$) şi $y = \lim\limits_{n\to\infty} Tx_n$ (în norma $\| \|_2$). Deoarece T este operator închis, rezultă că $y = Tx$, ceea ce arată că $\lim\limits_{n\to\infty} \| x_n - x \|_3 = 0$. Aplicând corolarul 42, rezultă că există $k > 0$ astfel încât $\| x \|_3 \leq k \| x \|_4$, adică $\| Tx \|_2 \leq (k-1) \| x \|_3$, ceea ce arată că T este operator continuu.

3.5 Topologia slabă şi teorema lui Alaoglu

Un rezultat clasic de analiză (teorema lui Riesz: [3],p.193) afirmă că bila unitate închisă dintr-un spaţiu normat este compactă dacă şi numai dacă dimensiunea spaţiului este finită. Fie $(X, \| \|)$ un spaţiu Banach infinit dimensional şi fie X' dualul său (care este şi el infinit dimensional). Am văzut

că împreună cu norma $\| f \| = \sup_{\|x\| \leq 1} |f(x)|$, X' este spaţiu Banach; conform rezultatului menţionat mai sus, rezultă că bila unitate închisă din X', pe care o vom nota $\overline{B_{X'}}(0,1)$, nu este mulţime compactă. În acest paragraf vom arăta că există o topologie pe X', (numită topologia slabă a dualului) în care $\overline{B_{X'}}(0,1)$ este mulţime compactă.

46.Definiţie (topologia slabă a dualului unui spaţiu Banach)
În cele ce urmează, vom prezenta, pe scurt, topologia slabă definită pe dualul unui spaţiu Banach. Pentru demonstraţii şi completări, recomandăm [4],p.46 şi p.120.
Fie X un spaţiu normat şi fie X' dualul său; pentru orice $x \in X$ definim seminorma $p_x : X' \to C$, $p_x(f) = f(x)$. Familia de seminorme $\mathcal{P} = \{p_x\}_{x \in X}$ separă punctele lui X', în sensul că pentru orice $0 \neq x \in X$, există $p \in \mathcal{P}$ astfel încât $p(x) \neq 0$.
O vecinătate a unui element $f \in X'$ se defineşte după cum urmează. Fie $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ o mulţime finită de seminorme şi fie, pentru orice $\epsilon > 0$:

$$W(f, \mathcal{R}, \epsilon) = \{g \in X' \, ; \, |p(g) - p(f)| < \epsilon, \, \forall p \in \mathcal{R}\}.$$

O bază de vecinătăţi ale elementului $f \in X'$ este

$$\{W(f, \mathcal{R}, \epsilon) \, ; \, \mathcal{R} \subseteq \mathcal{P} \, , \mathcal{R} \text{ finită}, \ \epsilon > 0\}.$$

Topologia definită pe X' de vecinătăţile de mai sus se numeşte topologia slabă a dualului; vom nota această topologie cu $w^\star$.

Un şir $(f_n)_n \subset X'$ converge la $f \in X'$ în topologia slabă dacă şi numai dacă sunt îndeplinite următoarele două condiţii:
(i) Şirul $(\| f_n \|)_n$ este mărginit.
(ii) Există o submulţime $A \subseteq X$ cu pentru care subspaţiul liniar generat este dens în X şi

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x), \, \forall x \in A.$$

O submulţime $\mathcal{F} \subseteq X'$ este $w^\star$-deschisă dacă pentru orice $f \in \mathcal{F}$ există o submulţime finită $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}$ şi $\epsilon > 0$ astfel încât

$$W(f, \mathcal{R}, \epsilon) \subseteq \mathcal{F}.$$

47.Teorema lui Alaoglu
Fie X un spaţiu normat; atunci $\overline{B_{X'}}(0,1)$ este mulţime compactă în topologia $w^\star$.
Demonstraţie Fie, pentru orice $x \in \overline{B_X}(0,1)$, mulţimea:

$C_x = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| \leq 1\}$. Cu topologia uzuală, C_x este multime compactă pentru orice $x \in \overline{B_X}(0,1)$ şi deci, (în baza teoremei lui Tihonov: a se vedea definiţia 43 sau [3],p.116) şi produsul cartezian $\prod_{x\in\overline{B_X}(0,1)} C_x$ este compact. Pentru orice $f \in \overline{B_{X'}}(0,1)$, notăm cu $\breve{f}$ restricţia lui f la bila unitate închisă din X . Deoarece $|\breve{f}(x)| \leq\| x \|\leq 1$, putem considera că

$$\breve{f} \in \prod_{x\in\overline{B_X}(0,1)} C_x;$$

aceasta se poate identificând pe $\breve{f}$ cu mulţimea valorilor sale, care este:

$$\{\breve{f}(x)\,;\, x \in \overline{B_X}(0,1)\}.$$

Fie $F : \overline{B_{X'}}(0,1) \to \prod_{x\in\overline{B_X}(0,1)} C_x$, $F(f) = \breve{f}$. Se demonstrează fără dificultate că F este injectivă şi continuă. Am identificat astfel $\overline{B_{X'}}(0,1)$ cu o submulţime dintr-un spaţiu compact; deoarece o submulţime închisă inclusă într-una compactă este şi ea compactă, ([3],p.102), rezultă că este suficient să demonstrăm că $\overline{B_{X'}}(0,1)$ este submulţime $w^\star$-închisă.
Pentru aceasta, să notăm cu $\mathcal{B}$ închiderea lui $\overline{B_{X'}}(0,1)$ în topologia $w^\star$ şi fie $f \in \mathcal{B}$. Pentru a arăta că $f \in \overline{B_{X'}}(0,1)$, trebuie să arătăm că f este liniară şi $\| f \|\leq 1$. Pentru liniaritate, fie $x, y \in X$ şi $\alpha, \beta \in C$; fie $\epsilon > 0$ arbitrar şi fie mulţimea:

$$W = \{g \in X'\,;\, |g(z) - f(z)| < \epsilon,\, \forall z \in \{x, y, \alpha x + \beta y\}\}.$$

Deoarece W este vecinătate a lui f, (în topologia $w^\star$), rezultă că

$$W \bigcap \overline{B_{X'}}(0,1) \neq \emptyset.$$

Fie h un element în această intersecţie. Deoarece h este liniară, rezultă:

$$|f(\alpha x + \beta y) - \alpha f(x) - \beta f(y)| \leq$$

$$\leq |f(\alpha x + \beta y) - h(\alpha x + \beta y)| +$$

$$+|\alpha|\,|h(x) - f(x)| + |\beta|\,|h(y) - f(y)| \leq (1 + |\alpha| + |\beta|\,)\epsilon,$$

şi deci (deoarece ϵ a fost arbitrar), f este liniară.
Pentru a demonstra inegalitatea $\| f \|\leq 1$, fie $x \in X$ şi $\epsilon > 0$ arbitrari; deoarece mulţimea

$$V = \{g \in X\,;\, |g(x) - f(x)| < \epsilon\}$$

este o vecinătate a lui f în topologia $w^\star$, rezultă că există $h \in V \bigcap \overline{B_{X'}}(0,1)$, şi deci:

$$|f(x)| \leq |f(x) - h(x)| + |h(x)| < \epsilon + \parallel x \parallel .$$

Deoarece ϵ a fost arbitrar, rezultă că $\parallel f \parallel \leq 1$, deci $f \in \overline{B_{X'}}(0,1)$, ceea ce încheie demonstraţia.

Capitolul 4

Algebre Banach

4.1 Rezultate generale din teoria algebrelor Banach

În acest paragraf vom prezenta noţiuni şi rezultate generale din teoria algebrelor Banach; tot aici vom da şi o listă cu principalele exemple de algebre Banach pe care le vom cita frecvent în restul lucrării.

1.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ un spaţiu vectorial complex. $\mathcal{A}$ se numeşte **algebră** dacă există o operaţie (numită **produs** sau **înmulţire**) pe $\mathcal{A}$ cu proprietăţile:
(i) $x(yz) = (xy)z \, , \forall x, y, z \in \mathcal{A}$, (asociativă).
(ii) $(x + y)z = xz + yz$ şi $x(y + z) = xy + xz$,
$\forall x, y, z \in \mathcal{A}$, (distributivă faţa de adunare).
(iii) $\alpha(xy) = x(\alpha y) = (\alpha x)y \, , \forall \alpha \in C \, , \forall x, y \in \mathcal{A}$.
O **algebră normată** este o algebră $\mathcal{A}$ pe care s-a definit o normă $\| \, \|$ cu proprietatea:
(iv) $\| xy \| \leq \| x \| \| y \| \, , \forall x, y \in \mathcal{A}$.
Dacă în plus spaţiul normat $(\mathcal{A}, \| \, \|)$ este complet, atunci $(\mathcal{A}, \| \, \|)$ se numeşte **algebră Banach** (sau **algebră normată completă**).
Din condiţia **(iv)** rezultă că produsul este operaţie continuă, deci pentru orice şiruri $(x_n)_n$ şi $(y_n)_n$ din $\mathcal{A}$ care converg la x şi respectiv la y, rezultă că $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = xy$.
O algebră normată $\mathcal{A}$ se numeşte **comutativă** dacă produsul este operaţie comutativă: $xy = yx \, , \forall x, y \in \mathcal{A}$. Dacă înmulţirea are un element neutru, e, (dacă există, el este unic), atunci $\mathcal{A}$ se numeşte **algebră normată cu unitate**; dacă în plus $\| e \| = 1$, atunci algebra se numeşte **unitară**. Un subspaţiu vectorial $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ se numeşte **subalgebră** dacă pen-

tru orice $x, y \in \mathcal{B}$, rezultă $xy \in \mathcal{B}$. Ca şi în cazul subspaţiilor vectoriale, o subalgebră a unei algebre Banach este completă dacă şi numai dacă este închisă. Fie $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ două algebre normate. O aplicaţie $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ se numeşte **morfism de algebre** dacă F este liniară şi multiplicativă (adică $F(xy) = F(x)F(y)\,, \forall x, y \in \mathcal{A}_1$). Un morfism bijectiv se numeşte **izomorfism**. Două algebre normate $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ se numesc **izomorfe** dacă între ele există un **izomorfism izometric**, adică $\| F(x) \| = \| x \|\,, \forall x \in \mathcal{A}_1$.

2.Exemple

(i) Cu operaţiile uzuale, mulţimea numerelor complexe este algebră Banach comutativă unitară.

(ii) Algebra $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \| \|_\infty)$
Spaţiul Banach $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \| \|_\infty)$ din exemplul 4(v),cap.1 se organizează ca algebră Banach comutativă unitară cu produsul $(fg)(t) = f(t)g(t)$,
elementul neutru fiind funcţia constantă **1**. Reamintim în continuare **teorema clasică a lui Weierstrass de aproximare uniformă a funcţiilor continue prin polinoame**. Fie $a, b \in R\,, a < b$ şi fie $(\mathcal{C}([a, b]), \| \|_\infty)$; menţionăm că spaţiul metric $[a, b]$ este subînţeles
cu topologia sa naturală, ca subspaţiu în spaţiul metric R. Teorema clasică a lui Weierstrass ([8],p.326; [14],.p.147) afirmă că pentru orice funcţie continuă $f \in \mathcal{C}([a, b])$ există un şir de polinoame $P_n \in C[X]$ care converge uniform la f pe intervalul $[a, b]$:

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[a,b]} |f(x) - P_n(x)| = \lim_{n\to\infty} \| f - P_n \|_\infty = 0.$$

Dacă facem acum observaţia că mulţimea polinoamelor cu coeficienţi complecşi (restricţionate la intervalul $[a, b]$) este o subalgebră în algebra $\mathcal{C}([a, b]), \| \|_\infty$, atunci teorema lui Weierstrass se poate reformula astfel:

Subalgebra polinoamelor $C[X]$, (restricţionate la $[a, b]$) este densă in algebra $\mathcal{C}([a, b])$.
Vom enunţa în continuare o generalizare (în cadrul teoriei algebrelor Banach) a acestui rezultat clasic, numită teorema Weierstrass-Stone (pentru demonstraţie se pot consulta: [14],p.150; [4],p.206; [5],p.46).
Fie $\mathcal{D}$ un spaţiu topologic compact ([3],p.99) şi fie $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{C}(\mathcal{D})$ o subalgebră; $\mathcal{B}$ se numeşte **închisă la conjugare** dacă pentru orice $f \in \mathcal{B}$ rezultă $\overline{f} \in \mathcal{B}$. Spunem că $\mathcal{B}$ **separă punctele lui** $\mathcal{D}$ dacă pentru orice $t, s \in \mathcal{D}\,, t \neq s$, există $f \in \mathcal{B}$ astfel încât $f(t) \neq f(s)$. Dacă pentru orice $t \in \mathcal{D}$ există $f \in \mathcal{D}$ astfel încât $f(t) \neq 0$, atunci se spune că $\mathcal{B}$ **nu se anulează pe** $\mathcal{D}$. Cu aceste definiţii precizate, putem enunţa **teorema Weierstrass-Stone**:

Fie $\mathcal{B}$ o subalgebră în $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \| \|_\infty)$; dacă $\mathcal{B}$ este închisă la conjugare,

separă punctele lui $\mathcal{D}$ şi nu se anulează pe $\mathcal{D}$, atunci $\mathcal{B}$ este densă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$.
În cazul în care considerăm numai funcţii continue cu valori reale, atunci ipoteza ca $\mathcal{B}$ să fie închisă la conjugare nu mai este necesară; facem de asemenea observaţia că ipoteza ca $\mathcal{B}$ să nu se anuleze pe $\mathcal{D}$ poate fi înlocuită cu ipoteza ca $\mathcal{B}$ să conţină funcţiile constante (este suficient să conţină funcţia constantă $\mathbf{1}$). Evident, teorema clasică a lui Weierstrass se obţine în cazul particular: $\mathcal{D} = [a, b]$ şi $\mathcal{B} = C[X]$.

(iii) Algebra $(\ell^\infty(Z), \| \|_\infty)$
Spaţiul Banach al şirurilor mărginite $(\ell^\infty(Z), \| \|_\infty)$, (cf. exemplului 4(iii),cap.1) este algebră Banach comutativă unitară cu produsul:

$$(xy)(n) = x(n)y(n)\,,\ \forall n \in Z,$$

având ca element neutru şirul constant $\mathbf{1}$.

(iv) Algebra $\mathcal{L}(X)$
Fie X un spaţiu Banach; atunci spaţiul Banach al operatorilor liniari şi continui pe X , $\mathcal{L}(X)$, este algebră Banach (necomutativă) unitară, înmulţirea fiind produsul (compunerea) operatorilor, iar elementul neutru operatorul identic (a se vedea cap.3,teoremele 5,7 şi 12).

(v) Algebra $(L^\infty(\Omega, \mu), \| \|_\infty)$
Spaţiul Banach al funcţiilor esenţial mărginite, $L^\infty(\Omega, \mu)$ (cf.exemplului 4(vi),cap.1) este algebră Banach comutativă unitară cu produsul $(fg)(t) = f(t)g(t)$, elementul neutru fiind funcţia constantă $\mathbf{1}$. În particular, $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi $L^\infty(R)$ sunt algebre Banach comutative unitare. Definim în continuare o subalgebră remarcabilă a lui $L^\infty(\mathcal{S}^1)$. Deoarece $\mathcal{S}^1$ este mulţime compactă (şi prin urmare măsura Lebesgue este finită) rezultă că orice funcţie esenţial mărginită pe $\mathcal{S}^1$ este de pătrat integrabil. Deci pentru orice $f \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, putem defini coeficienţii săi Fourier, $\hat{f}(n)\,,\ \forall n \in Z$ (cf. teoremei 19,cap.1).
Fie $H^\infty(\mathcal{S}^1) = \{f \in L^\infty(\mathcal{S}^1)\,;\ \hat{f}(n) = 0\,,\ \forall n < 0\,\}$. Se demonstrează că $H^\infty(\mathcal{S}^1)$ este subalgebră închisă în $L^\infty(\mathcal{S}^1)$. Elementele subalgebrei (Banach) $H^\infty(\mathcal{S}^1)$ se numesc funcţii analitice esenţial mărginite ([11],p.159).

(vi) Algebra $\ell^1(Z)$
Fie spaţiul Banach $(\ell^1(Z), \| \|_1)$ (cf. exemplului 4(ii),cap.1). Pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$ definim **convoluţia** lui x cu y prin:

$$(x \star y)(n) = \sum_{k \in Z} x(n-k)y(k)\,,\ \forall n \in Z.$$

Şirul $x \star y \in \ell^1(Z)$ deoarece:

$$\| x \star y \|_1 = \sum_{n\in Z} | \sum_{k\in Z} x(n-k)y(k)| \leq \sum_{n\in Z}\sum_{k\in Z} |x(n-k)y(k)| =$$

$$= \sum_{k\in Z} |y(k)| \sum_{m\in Z} |x(m)| = \| x \|_1 \| y \|_1,\ \forall x, y \in \ell^1(Z).$$

Produsul de convoluţie astfel definit este comutativ, asociativ şi distributiv faţă de adunarea şirurilor. Din egalitatea (imediată):
$(x \star \sigma_k)(n) = x(n-k)\,,\ \forall n \in Z$, rezultă că σ_o este element neutru pentru convoluţia şirurilor. Pentru demonstraţii cât şi pentru alte proprietăţi şi aplicaţii ale convoluţiei se pot consulta [1],p.518; [15],p.104; [5],p.54.

(vii) Algebra $L^1(R)$
În spaţiul Banach $L^1(R)$ (cf. exemplului 4(iv),cap.1) produsul de **convoluţie** (al funcţiilor) este definit prin:

$$(f \star g)(t) = \int_R f(t-s)g(s)ds.$$

Se demonstrează că integrala de mai sus converge aproape pentru orice $t \in R$ şi $\| f \star g \|_1 \leq \| f \|_1 \| g \|_1$, adică $f \star g \in L^1(R)$. Operaţia astfel definită este comutativă, asociativă şi distributivă faţa de adunarea funcţiilor; convoluţia funcţiilor (spre deosebire de convoluţia şirurilor) nu admite element neutru. In concluzie, $L^1(R)$ este o algebră Banach comutativă fără unitate; bibliografie: [17],p.49; [4],p.196; [13],p.146.

În algebrele normate cu unitate, elementele inversabile au proprietăţi remarcabile.

3.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră normată cu unitatea e. Un element $x \in \mathcal{A}$ se numeşte **inversabil** dacă există $y \in \mathcal{A}$ astfel încât $xy = yx = e$; în această situaţie, y se numeşte **inversul** lui x şi se notează x^{-1} (dacă există, el este unic). Notăm cu $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ mulţimea elementelor inversabile ale algebrei $\mathcal{A}$. Este uşor de demonstrat că $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este grup (cu operaţia de înmulţire) şi $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$. O algebră normată în care toate elementele nenule sunt inversabile se numeşte **corp normat**.

4.Propoziţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach unitară. Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea

$\| x \| < 1$ rezultă că elementul $e - x$ este inversabil şi inversul său este:

$$(e-x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} x^n.$$

Demonstraţie Fie $x \in \mathcal{A}$, $\| x \| < 1$. Arătăm mai întâi că seria $\sum_{n\geq 0} x^n$ este absolut convergentă (şi deci şi convergentă deoarece $\mathcal{A}$ este completă). Folosind inegalitatea $\| x^n \| \leq \| x \|^n$, (care rezultă direct din definiţia algebrei normate), avem:

$$\sum_{n\geq 0} \| x^n \| \leq \sum_{n\geq 0} \| x \|^n = (1 - \| x \|)^{-1} < \infty.$$

Rezultă că şirul $s_n = \sum_{k=0}^{n} x^k$ este convergent; din egalitatea

$$(e-x)s_n = s_n(e-x) = e - x^{n+1},$$

pentru $n \to \infty$, rezultă (folosind şi faptul că $x^{n+1} \to 0$) concluzia propoziţiei. Din demonstraţie rezultă şi inegalitatea

$$\| (e-x)^{-1} \| \leq (1 - \| x \|)^{-1}, \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \| x \| < 1.$$

5.Propoziţie
Într-o algebră Banach unitară mulţimea elementelor inversabile este deschisă.
Demonstraţie Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach unitară şi fie $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$.
Vom arăta incluziunea:

$$B(a, \| a^{-1} \|^{-1}) \subset \mathcal{G}(\mathcal{A}),$$

ceea ce va încheia demonstraţia.
Fie $x \in B(a, \| a^{-1} \|^{-1})$; avem:

$$\| e - a^{-1}x \| = \| a^{-1}a - a^{-1}x \| = \| a^{-1}(a-x) \| \leq$$
$$\leq \| a^{-1} \| \| a - x \| < \| a^{-1} \| \| a^{-1} \|^{-1} = 1.$$

Conform propoziţiei 4, rezultă că elementul $e - (e - a^{-1}x) = a^{-1}x$ este inversabil şi deci şi x este inversabil, fiind produs de elemente inversabile: $x = a(a^{-1}x)$.

6.Propoziţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach unitară.
Atunci aplicaţia $\mathcal{G}(\mathcal{A}) \ni x \to x^{-1} \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ este continuă.
Demonstraţie Arătăm mai întâi că aplicaţia $x \to x^{-1}$ este continuă în $x = e$:

$$\| x^{-1} - e \| = \| x^{-1}(e - x) \| \leq \| x^{-1} \| \| e - x \| \leq \frac{\| e - x \|}{1 - \| e - x \|}.$$

Fie acum $a \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, arbitrar fixat; atunci, pentru orice $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$, avem $x^{-1} = a^{-1}(xa^{-1})^{-1}$ şi deci :

$$\| x^{-1} - a^{-1} \| = \| a^{-1}(xa^{-1})^{-1} - a^{-1} \| =$$

$$= \| a^{-1}[(xa^{-1})^{-1} - e] \| \leq \| a^{-1} \| \| (xa^{-1})^{-1} - e \| .$$

Deoarece aplicaţia $x \to xa^{-1}$ este continuă (cf.definiţiei 1), iar aplicaţia $y \to y^{-1}$ este continuă în e (cf. celor demonstrate mai sus), demonstraţia se încheie.

7.Definiţie (spectrul)
Fie $\mathcal{A}$ o algebră normată unitară şi fie $x \in \mathcal{A}$; mulţimea

$$\sigma(x) = \{\lambda \in C\,;\, \lambda e - x \text{ nu este inversabil}\}$$

se numeşte **spectrul** lui x. Complementara spectrului se numeşte mulţimea **rezolventă**: $\rho(x) = C - \sigma(x)$. Dacă $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ este o subalgebră şi dacă $x \in \mathcal{B}$, atunci definim

$$\sigma_{\mathcal{B}}(x) = \{\lambda \in C\,;\, \lambda e - x \text{ nu are invers în algebra } \mathcal{B}\};$$

numim $\sigma_{\mathcal{B}}(x)$ spectrul în algebra $\mathcal{B}$ al elementului x. Incluziunea $\sigma(x) \subseteq \sigma_{\mathcal{B}}(x)$ este evidentă (în general, ea este strictă).

8.Observaţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră normată unitară şi fie $a \in \mathcal{A}$ un element inversabil. Atunci $\sigma(a^{-1}) = \{\lambda^{-1}\,;\, \lambda \in \sigma(a)\}$.
Demonstraţie Fie $\lambda \in \rho(a)$, $\lambda \neq 0$; elementul $(\lambda e - a)^{-1}$ (care există) comută cu a şi deci avem:

$$e = (\lambda e - a)(\lambda e - a)^{-1} = (a^{-1} - \lambda^{-1}e)(\lambda e - a)^{-1}\lambda a,$$

ceea ce arată elementul $\lambda^{-1}e - a^{-1}$ este inversabil, deci $\lambda^{-1} \in \rho(a^{-1})$; restul raţionamentelor le propunem ca exerciţiu.

9.Exemple

(i) În algebra (corpul) Banach al numerelor complexe, orice element nenul este inversabil şi deci $\sigma(x) = \{x\}$, $\forall x \in C$.

(ii) Să considerăm algebra Banach a funcţiilor continue, $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \| \|_\infty)$ (cf. exemplului 2(ii)) şi fie $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. Demonstrăm în continuare egalitatea

$$\sigma(f) = \{f(t)\,;\, t \in \mathcal{D}\}.$$

Pentru aceasta este suficient să demonstrăm că funcţia f este inversabilă (în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$) dacă şi numai dacă $f(t) \neq 0\,, \forall t \in \mathcal{D}$. Dacă f este inversabilă, atunci există $g \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$ astfel încât $f(t)g(t) = 1\,, \forall t \in \mathcal{D}$ şi deci $f(t) \neq 0\,, \forall t \in \mathcal{D}$. Reciproc, dacă $f(t) \neq 0\,, \forall t \in \mathcal{D}$, atunci putem defini funcţia continuă $g(t) = \frac{1}{f(t)}$, ceea ce încheie demonstraţia.

(iii) Fie $\mathcal{L}(C^n)$ algebra Banach a operatorilor liniari şi continui pe C^n şi fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$. În capitolul 1 (paragraful 1) am demonstrat:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C\,;\, \lambda I - T \,\text{nu este injectiv}\} =$$

$$= \{\lambda \in C\,;\, \lambda I - T \,\text{nu este surjectiv}\} =$$

$$= \{\lambda \in C\,;\, \exists x \in C^n\,,\, x \neq 0 \text{ astfel încât } Tx = \lambda x\}.$$

Mulţimea $\sigma(T)$ este în acest caz finită şi elementele ei (care se numesc valorile proprii ale lui T) sunt rădăcinile polinomului caracteristic asociat matricei operatorului T (într-o bază oarecare).

(iv) Fie X un spaţiu Banach infinit dimensional şi fie $T \in \mathcal{L}(X)$. Din teorema lui Banach (corolarul 41,cap.3) rezultă că:

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C\,;\, \lambda I - T \,\text{nu este bijectiv}\}.$$

(v) Să calculăm acum spectrul unui element $x \in (\ell^\infty(Z), \| \|_\infty)$, (cf. exemplului 2(iii)). Fie $\lambda \in C$ astfel încât $\lambda - x$ este inversabil; există deci $y \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât $\lambda - x(n) = (y(n))^{-1}\,, \forall n \in Z$. De aici rezultă inegalitatea $|\lambda - x(n)| \geq (\| y \|_\infty)^{-1} > 0$ şi deci am demonstrat implicaţia:

$$\lambda \in \rho(x) \Rightarrow \exists M > 0 \,\text{astfel încât}\, |x(n) - \lambda| \geq M\,,\, \forall n \in Z.$$

Reciproc, fie $\lambda \in C$ astfel încât există $M > 0$ cu proprietatea $|x(n) - \lambda| \geq M\,, \forall n \in Z$; considerăm şirul $y(n) = (x(n) - \lambda)^{-1}\,, \forall n \in Z$. Evident, $y(x - \lambda) = 1$ şi $y \in \ell^\infty(Z)$, deoarece $\| y \|_\infty \leq M^{-1} < \infty$. Am demonstrat deci egalitatea:

$$\rho(x) = \{\lambda \in C\,;\, \exists M > 0 \,\text{astfel încât}\, |x(n) - \lambda| \geq M\},$$

sau, echivalent, luând complementarele mulţimilor de mai sus:

$$\sigma(x) = \overline{\{x(n)\,;\, n \in Z\}}.$$

(vi) Pentru a calcula spectrul unei funcţii φ din algebra $(L^\infty(\Omega,\mu), \|\ \|_\infty)$, (cf. exemplului 2(v)) introducem mai întâi noţiunea de imagine esenţială ([8],p.261; [5],p.57):

$$\text{essran}(\varphi) = \{\lambda \in C\,;\, \mu(\{t \in \Omega\,;\, |\varphi(t) - \lambda| < \epsilon\}) > 0\,,\, \forall \epsilon > 0\}\,.$$

Se demonstrează că imaginea esenţială este mulţime închisă şi mărginită (deci compactă în C) şi $\| \varphi \|_\infty = \sup\{\,|\lambda|\,;\, \lambda \in \text{essran}(\varphi)\}$, ([5],p.57).
Demonstrăm în continuare că spectrul unei funcţii esenţial mărginite este egal cu imaginea esenţială a funcţiei. Fie $\lambda \in \rho(\varphi)$; atunci funcţia $(\varphi - \lambda)^{-1}$ este esenţial mărginită şi deci:

$$\mu\left(\{t \in \Omega\,;\, |\varphi(t) - \lambda| < \frac{1}{2} \| \varphi - \lambda \|_\infty\}\right) = 0,$$

adică $\lambda \in C - \text{essran}(\varphi)$. Invers, dacă $\lambda \in C - \text{essran}(\varphi)$ rezultă că există $\epsilon > 0$ astfel încât $\mu\left(\{t \in \Omega\,;\, |\varphi(t) - \lambda| < \epsilon\}\right) = 0$; de aici rezultă inegalitatea $\| \frac{1}{\varphi-\lambda} \|_\infty \leq \epsilon^{-1}$, deci funcţia $\frac{1}{\varphi-\lambda}$ este esenţial mărginită, ceea ce arată că $\varphi - \lambda$ este inversabilă, adică $\lambda \in \rho(\varphi)$.
Să reţinem că în cursul demonstraţiei am arătat că o funcţie $\varphi \in L^\infty(\Omega,\mu)$ este inversabilă dacă şi numai dacă există $m > 0$ astfel încât $|\varphi(t)| \geq m\,,\, \forall t \in \Omega\,(\mu - \text{a.p.t.})$. În cazul în care Ω este un spaţiu topologic separat, iar μ este o măsură boreliană regulată, atunci imaginea esenţială a unei funcţii continue φ este închiderea (în C) a imaginii sale: $\text{essran}(\varphi) = \overline{\varphi(\Omega)}\,;$ demonstraţia este elementară şi se bazează pe faptul că mulţimile deschise au măsură nenulă. Dacă în plus spaţiul Ω este compact, atunci imaginea esenţială a unei funcţii continue coincide cu imaginea funcţiei. În particular, (pentru Ω compact) o funcţie continuă este inversabilă (în algebra $L^\infty(\Omega,\mu)$) dacă şi numai dacă nu se anulează.

10.Teoremă
Într-o algebră Banach unitară spectrul oricărui element este mulţime nevidă şi compactă.
Demonstraţie Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară şi fie $x \in \mathcal{A}$. Vom arăta mai întâi că $\sigma(x)$ este mulţime compactă. Fie funcţia (continuă) $F : C \to \mathcal{A}\,,\, F(\lambda) = x - \lambda e$. Imaginea inversă prin F a lui $\mathcal{G}(\mathcal{A})$ este mulţime deschisă şi deci $\sigma(x) = C - F^{-1}(\mathcal{G}(\mathcal{A}))$ este închisă. Pentru a demonstra că $\sigma(x)$ este mulţime mărginită, fie $\lambda \in C$ cu proprietatea $|\lambda| > \| x \|$; atunci $\| \lambda^{-1}x \| < 1$ şi deci conform

propoziţiei 4 rezultă că elementul $e - \lambda^{-1}x$ este inversabil. Am demonstrat deci incluziunea:

$$\sigma(x) \subseteq \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| \leq \| x \|\}.$$

Pentru a demonstra că $\sigma(x)$ este mulţime nevidă, să presupunem prin absurd că pentru orice $\lambda \in C$, elementul $\lambda e - x$ este inversabil. Atunci, pentru orice funcţională $f \in \mathcal{A}'$ putem defini aplicaţia $G : C \to C$,
$G(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1})$. Demonstrăm în continuare că G este funcţie întreagă şi mărginită. Pentru orice $\omega \in C$ arbitrar fixat, avem:

$$\lim_{\lambda\to\omega} \frac{G(\lambda) - G(\omega)}{\lambda - \omega} = \lim_{\lambda\to\omega} \frac{f((\lambda e - x)^{-1}) - f((\omega e - x)^{-1}))}{\lambda - \omega} =$$

$$= f\left(\lim_{\lambda\to\omega} \frac{(\lambda e - x)^{-1} - (\omega e - x)^{-1}}{\lambda - \omega}\right) =$$

$$= f\left(\lim_{\lambda\to\omega} \frac{(\omega e - x)^{-1}[(\omega e - x) - (\lambda e - x)](\lambda e - x)^{-1}}{\lambda - \omega}\right) =$$

$$= -f((\omega e - x)^{-2}),$$

ceea ce arată că G este funcţie întreagă.
Pentru orice $|\lambda| > \| x \|$, din demonstraţia propoziţiei 4, rezultă:

$$\| G(\lambda) \| = \| f((\lambda e - x)^{-1}) \| \leq \| f \| \| (\lambda e - x)^{-1} \| =$$

$$= \| f \| \| \lambda^{-1}(e - \lambda^{-1}x)^{-1} \| \leq \| f \| \, |\lambda^{-1}|(1 - \| \lambda^{-1}x \|)^{-1},$$

deci G este funcţie mărginită. Din teorema lui Liouville ([1],p.424), rezultă că G este funcţie constantă; în particular, $G(0) = G(1)$, adică $f(-x^{-1}) = f((e - x)^{-1})\,,\ \forall f \in \mathcal{A}'$.
Pe de altă parte, deoarece $-x^{-1} \neq (e - x)^{-1}$, există (în baza corolarului 25,cap.3) o funcţională $g \in \mathcal{A}'$ astfel încât $g(-x^{-1}) \neq g((e - x)^{-1})$, ceea ce constituie o contradicţie cu concluzia de mai sus.

O consecinţă a acestui rezultat este caracterizarea corpurilor Banach.

11.Corolar (Teorema Gelfand-Mazur)
Orice corp Banach este izomorf cu corpul numerelor complexe.
Demonstraţie Fie $\mathcal{A}$ un corp Banach şi fie $x \in \mathcal{A}$; atunci, conform teoremei 10, există $\lambda(x) \in \sigma(x)$ şi deci elementul $\lambda(x)e - x$ nu este inversabil. Deoarece $\mathcal{A}$ este corp, rezultă că $\lambda(x)e - x = 0$, sau, $x = \lambda(x)e$ (de aici rezultă şi faptul că $\lambda(x)$ este unic). Se arată simplu că aplicaţia $\Phi : \mathcal{A} \to C\,,\ \Phi(x) = \lambda(x)$ este un izomorfism de algebre Banach.

12.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach şi fie $x \in \mathcal{A}$. **Raza spectrală** a lui x este, prin definiţie, $\mathrm{r}(x) = \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(x)\}$. Să observăm că definiţia este corectă datorită teoremei 10; de asemenea, din demonstraţia aceleeaşi teoreme rezultă şi inegalitatea: $\mathrm{r}(x) \leq \| x \|$. Din exemplul 9 rezultă că în algebrele $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ şi $L^\infty(\Omega, \mu)$ raza spectrală este egală cu norma: $\mathrm{r}(f) = \| f \|_\infty$. O algebră Banach în care raza spectrală şi norma nu coincid este algebra operatorilor liniari şi continui pe un spaţiu Banach; a se vedea, de exemplu, teorema 49, cap.5 (operatorul Volterra are raza spectrală 0, dar nu este identic nul).

Încheiem acest paragraf cu formula razei spectrale.

13.Teoremă (formula razei spectrale)
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach unitară; atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, are loc egalitatea:
$$\mathrm{r}(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} .$$
Demonstraţie Vom demonstra mai întâi inegalitatea:
$$\mathrm{r}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} .$$
Pentru aceasta, fie $n \in N$ şi fie $\lambda \in C$ astfel încât $\lambda^n \in \rho(x^n)$ (deci există $(\lambda^n e - x^n)^{-1}$). Din identitatea:
$$\lambda^n e - x^n = (\lambda e - x)(\lambda^{n-1} e + \lambda^{n-2} x + .. + x^{n-1}),$$
înmulţind ambii membri cu $(\lambda^n e - x^n)^{-1}$, rezultă că $\lambda e - x$ este element inversabil şi deci $\lambda \in \rho(x)$. În concluzie, am demonstrat implicaţia:
$$\lambda \in \sigma(x) \Rightarrow \lambda^n \in \sigma(x^n).$$
Pe de altă parte, $|\lambda^n| \leq \| x^n \|$ (deoarece raza spectrală este mai mică decât norma) şi deci $|\lambda| \leq \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$, $\forall n \in N$, adică:
$$\mathrm{r}(x) \leq \liminf_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} .$$
Pentru a demonstra inegalitatea $\mathrm{r}(x) \geq \limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}}$, considerăm $|\lambda| > \| x \|$; din propoziţia 4 rezultă că $\lambda e - x$ este inversabil şi:
$(\lambda e - x)^{-1} = \sum_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} x^n$. Fie, ca în demonstraţia teoremei 10, $f \in \mathcal{A}'$ şi

$G : \rho(x) \to C$, $G(\lambda) = f((\lambda e - x)^{-1})$. Funcţia G este olomorfă pe $\rho(x)$; dacă în plus $|\lambda| > \| x \|$, atunci, din formula inversului lui $\lambda e - x$ rezultă:

$$G(\lambda) = \sum_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} f(x^n).$$

Rezultă deci că seria $\sum\limits_{n\geq 0} \lambda^{-n-1} f(x^n)$ converge şi pentru $|\lambda| > \mathrm{r}(x)$; în particular, de aici rezultă că pentru orice $f \in \mathcal{A}'$ şi pentru orice $\lambda \in C$, $|\lambda| > \mathrm{r}(x)$ avem:

$$\sup_{n\geq 0} f(\lambda^{-n} x^n) < \infty.$$

Din corolarul 26,cap.3 rezultă $\sup\limits_{n\geq 0} \| \lambda^{-n} x^n \| < \infty$. În concluzie, pentru orice $\lambda \in C$, $|\lambda| > \mathrm{r}(x)$, există $k(\lambda) > 0$ astfel încât

$$\| \lambda^{-n} x^n \| \leq k(\lambda) \, , \forall n \in N.$$

De aici rezultă $\| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| (k(\lambda))^{\frac{1}{n}}$ şi deci:

$$\limsup_{n\to\infty} \| x^n \|^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda| \leq \mathrm{r}(x),$$

ceea ce încheie demonstraţia.

4.2 Algebre Banach comutative

În studiul algebrelor Banach comutative, noţiunea de caracter este un instrument foarte puternic. În acest paragraf prezentăm proprietăţile spaţiului caracterelor asociat unei algebre Banach comutative unitare şi teoria transformatei Gelfand.

14.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară. O aplicaţie $\psi : \mathcal{A} \to C$ se numeşte **caracter** al algebrei $\mathcal{A}$ dacă :
(i) $\psi(\alpha x + \beta y) = \alpha\psi(x) + \beta\psi(y)$, $\forall \alpha$, $\beta \in C$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$; (liniară).
(ii) $\psi(xy) = \psi(x)\psi(y)$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$; (multiplicativă).
(iii) ψ nu este identic nulă.
Mulţimea caracterelor unei algebre $\mathcal{A}$ se numeşte **spaţiul caracterelor** algebrei şi îl vom nota cu $\mathcal{K}(\mathcal{A})$.

15.Propoziţie
Fie $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$; atunci:

(i) $\psi(e) = 1$.
(ii) $\psi(x) \neq 0\,,\ \forall x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$.
(iii) ψ este aplicaţie continuă; deci $\mathcal{K}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}'$.
(iv) $\| \psi \| = 1$.
Demonstraţie (i) Fie $x \in \mathcal{A}$ astfel încât $\psi(x) \neq 0$; atunci
$\psi(x) = \psi(xe) = \psi(x)\psi(e)$ şi deci $\psi(e) = 1$.
(ii) Fie $x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ şi să presupunem prin absurd că $\psi(x) = 0$; atunci:

$$1 = \psi(e) = \psi(xx^{-1}) = \psi(x)\psi(x^{-1}) = 0\,,\ \text{contradicţie.}$$

(iii) Fie $\lambda \in C$ astfel încât $|\lambda| > 1$ şi fie $x \in \mathcal{A}$ cu proprietatea $\| x \| \leq 1$. Atunci, din propoziţia 4 rezultă $e - \lambda^{-1}x \in \mathcal{G}(\mathcal{A})$ şi deci din **(ii)** rezultă că $\psi(e - \lambda^{-1}x) \neq 0$, adică $\psi(x) \neq \lambda$. În concluzie, am demonstrat că pentru orice $x \in \mathcal{A}$ cu $\| x \| \leq 1$, are loc inegalitatea $|\psi(x)| \leq 1$. De aici rezultă (cu un raţionament pe care l-am mai folosit) inegalitatea
$|\psi(x)| \leq \| x \|\,,\ \forall x \in \mathcal{A}$ şi deci ψ este funcţională continuă cu $\| \psi \| \leq 1$; dar $\psi(e) = 1$ şi deci $\| \psi \| = 1$. În particular, din cele demonstrate rezultă incluziunea:

$$\mathcal{K}(\mathcal{A}) \subset \{f \in \mathcal{A}'\,;\ \| f \| = 1\}.$$

16.Propoziţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară. Considerând pe dualul $\mathcal{A}'$ topologia slabă (notată $w^\star$; a se vedea definiţia 46,cap.3), atunci, $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ este mulţime compactă; se mai spune că spaţiul caracterelor unei algebre Banach comutative unitare este slab-compact.
Demonstraţie Conform teoremei lui Alaoglu (teorema 47,cap.3), sfera unitate din $\mathcal{A}'$ este compactă în topologia $w^\star$, deci este suficient să demonstrăm că $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ este submulţime închisă (în topologia $w^\star$) în mulţimea $\{f \in \mathcal{A}'\,;\ \| f \| = 1\}$.
Fie $\overline{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$ închiderea mulţimii $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ în topologia $w^\star$ şi fie $f \in \overline{\mathcal{K}(\mathcal{A})}$; pentru a arăta că $f \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, vom arăta că f este funcţională multiplicativă şi $f(e) = 1$. Pentru aceasta, fie $x, y \in \mathcal{A}$ şi $\epsilon > 0$, arbitrari. Considerăm vecinătatea lui f (cf. definiţiei 46,cap.3):

$$W = \{g \in \mathcal{A}\,;\ |g(t) - f(t)| < \epsilon,\ \forall t \in \{x, y, xy, e\}\}.$$

Fie $h \in W \bigcap \mathcal{K}(\mathcal{A})$; deoarece h este multiplicativă, avem:

$$|f(xy) - f(x)f(y)| \leq |f(xy) - h(xy)| +$$

$$|h(x)[h(y) - f(y)]| + |f(y)[h(x) - f(x)]| \leq$$

$$\leq (1 + \| x \| + |f(y)|)\,\epsilon;$$

deoarece ϵ a fost arbitrar, rezultă $f(xy) = f(x)f(y)$.
Deoarece $h(e) = 1$, rezultă

$$|f(e) - 1| = |f(e) - h(e)| < \epsilon,$$

şi deci $f(e) = 1$, ceea ce încheie demonstraţia.

17.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară şi fie $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ spaţiul caracterelor asociat ei, cosiderat ca spaţiu topologic (compact) cu topologia slabă. Fie $(\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A})), \|\,\|_\infty)$ algebra Banach (comutativă) a funcţiilor continue definite pe $\mathcal{K}(\mathcal{A})$ cu valori complexe (cf. exemplului 2(ii)). Aplicaţia

$$\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))\,,\ (\Gamma(x))(\psi) = \psi(x)$$

se numeşte **transformarea Gelfand** pe algebra $\mathcal{A}$.
Funcţia (continuă) $\Gamma(x)$ se numeşte **transformata Gelfand** a elementului $x \in \mathcal{A}$.

Proprietăţile imediate ale transformării Gelfand sunt date în următoarea propoziţie.

18.Propoziţie
În condiţiile definiţiei 17, avem:
(i) Aplicaţia Γ este morfism de algebre Banach.
(ii) $\| \Gamma(x) \|_\infty \leq \| x \|$, (deci Γ este continuă).
(iii) $\sigma(x) \supseteq \{\lambda \in C\,;\, \exists \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})\, \text{astfel încât}\, (\Gamma(x))(\psi) = \lambda\}$.
Proprietatea **(iii)** afirmă că spectrul elementului $x \in \mathcal{A}$ conţine imaginea funcţiei continue $\Gamma(x)$. Conform exemplului 8(ii), această imagine este spectrul funcţiei $\Gamma(x)$ în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$; prin urmare **(iii)** se poate reformula astfel: $\sigma(x) \supseteq \sigma(\Gamma(x))$.
Demonstraţie (i) Liniaritatea aplicaţiei Γ este evidentă. Pentru a demonstra multiplicativitatea, fie $x, y \in \mathcal{A}$ şi $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$; avem:

$$(\Gamma(xy))(\psi) = \psi(xy) = \psi(x)\psi(y) = (\Gamma(x))(\psi)(\Gamma(y))(\psi).$$

(ii) Fie $x \in \mathcal{A}$; avem:

$$\| \Gamma(x) \|_\infty = \sup_{\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})} |\psi(x)| \leq \sup\{|f(x)|\,;\, f \in \mathcal{A}'\,,\ \| f \| = 1\} = \| x \|,$$

unde, pentru ultima egalitate am folosit corolarul 26,cap.3.
(iii) Fie $\lambda \in C$ astfel încât $\lambda e - x$ este inversabil; atunci, conform propoziţiei 15(ii), pentru orice $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, avem $\psi(\lambda e - x) \neq 0$, adică

$\lambda \neq \psi(x)\,,\, \forall \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$. Rezultă deci că λ nu este în imaginea funcţiei $\Gamma(x)$, deci am demonstrat incluziunea $\rho(x) \subseteq C - \Gamma(x)(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$.
Înainte de a demonstra şi alte proprietăţi ale transformării Gelfand, (dintre care cea mai importantă este că în **(iii)** avem egalitate), vom da câteva exemple.

19.Exemple

(i) Să considerăm algebra $(\mathcal{C}(\mathcal{D}), \|\ \|_\infty)$. Vom demonstra că, în acest caz, spaţiul caracterelor se poate identifica (într-un mod canonic, ce va fi precizat) cu spaţiul topologic compact $\mathcal{D}$. Fie $t \in \mathcal{D}$ şi fie
$\psi_t : \mathcal{C}(\mathcal{D}) \to C\,,\ \psi_t(f) = f(t)$. Atunci ψ_t este caracter al algebrei $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, iar aplicaţia $\mathcal{D} \ni t \to \psi_t \in \mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ este bijectivă, continuă şi cu inversa continuă (o astfel de aplicaţie între două spaţii topologice se numeşte homeomorfism). Înainte de a demonstra această afirmaţie să observăm că transformarea Gelfand pe algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$ este, (folosind identificarea de mai sus), aplicaţia identică $\Gamma : \mathcal{C}(\mathcal{D}) \to \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D})))$, $(\Gamma(f))(\psi_t) = f(t)$, adică $\Gamma(f) = f$. Faptul că pentru orice $t \in \mathcal{D}$ funcţionala ψ_t este caracter este imediat. Demonstrăm acum că orice caracter este de această formă: fie $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D}))$ şi fie nucleul Ker $(\psi) = \{f \in \mathcal{C}(\mathcal{D})\,;\, \psi(f) = 0\}$. Arătăm mai întâi că există $t_o \in \mathcal{D}$ astfel încât $f(t_o) = 0\,,\, \forall f \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Să presupunem prin absurd că pentru orice $t \in \mathcal{D}$, există $f^t \in \mathrm{Ker}(\psi)$ astfel încât $f^t(t) \neq 0$; atunci, din continuitatea lui f^t rezultă că există o vecinătate deschisă V_t a lui t astfel încât $f^t(s) \neq 0\,,\, \forall s \in V_t$. Mulţimea $\{V_t\}_{t\in\mathcal{D}}$ este o acoperire deschisă a spaţiului compact $\mathcal{D}$, deci există $V_{t_1}, V_{t_2}, .., V_{t_n}$ astfel încât $\bigcup\limits_{i=1}^{n} V_{t_i} = \mathcal{D}$. Fie $g = \sum\limits_{i=1}^{n} \overline{f}_{t_i} f_{t_i}$; atunci:

$$\psi(g) = \sum_{i=1}^{n} \psi(\overline{f}_{t_i})\psi(f_{t_i}) = 0, \tag{4.1}$$

şi deci $g \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Dar $g(s) = \sum\limits_{i=1}^{n} |f_{t_i}(s)|^2 > 0$ şi deci g este funcţie inversabilă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{D})$. Deoarece caracterele nu se anulează pe elemente inversabile, rezultă că $\psi(g) \neq 0$, ceea ce este în contradicţie cu (4.1). Fie deci $t_o \in \mathcal{D}$ astfel încât $f(t_o) = 0\,,\, \forall f \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Pentru orice $h \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$, funcţia $h - \psi(h)1 \in \mathrm{Ker}(\psi)$, deoarece $\psi(h - \psi(h)1) = \psi(h) - \psi(h)\psi(1) = 0$. Rezultă deci că $(h - \psi(h)1)(t_o) = 0$, adică $\psi(h) = h(t_o)\,,\, \forall h \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$. În concluzie, am demonstrat că $\psi = \psi_{t_o}$. Aplicaţia $\mathcal{W} : \mathcal{D} \to \mathcal{K}(\mathcal{C}(\mathcal{D}))\,,\, \mathcal{W}(t) = \psi_t$ este bijectivă (surjectivitatea a fost demonstrată mai sus, iar injectivitatea este evidentă). Pentru a demonstra continuitatea aplicaţiei $\mathcal{W}$ vom face ipoteza suplimentară că $\mathcal{D}$ este spaţiu metric (compact); demonstraţia se poate adapta şi pentru cazul general, avantajul spaţiilor metrice fiind acela

că putem caracteriza continuitatea cu ajutorul şirurilor. Fie $(t_n)_n$ un şir care converge la t (în spaţiul metric $\mathcal{D}$). Pentru orice $f \in \mathcal{C}(\mathcal{D})$, avem:

$$\lim_{n\to\infty}[\mathcal{W}(t_n)](f) = \lim_{n\to\infty}\psi_{t_n}(f) = \lim_{n\to\infty} f(t_n) =$$
$$= f(t) = \psi_t(f) = [\mathcal{W}(t)](f),$$

ceea ce arată că aplicaţia $\mathcal{W}$ este continuă. Continuitatea lui $\mathcal{W}^{-1}$ este acum consecinţa directă a unui rezultat de topologie : orice aplicaţie bijectivă şi continuă între două spaţii compacte are inversa continuă, ([3],p.111).

(ii) Pentru a identifica spaţiul caracterelor algebrei $\ell^1(Z)$, vom reaminti mai întâi câteva proprietăţi ale transformării Fourier definite pe această algebră.
Fie $x \in \ell^1(Z)$ şi fie $\mathcal{S}^1$ cercul unitate. Seria $\sum\limits_{n\in Z} x(n)\lambda^{-n}$ converge absolut şi uniform (în raport cu $\lambda \in \mathcal{S}^1$):

$$\sum_{n\in Z} |x(n)\lambda^{-n}| \leq \sum_{n\in Z} |x(n)| = \| x \|_1 .$$

Notăm cu $\hat{x}(\lambda)$ suma seriei de mai sus; funcţia $\hat{x} : \mathcal{S}^1 \to C$ este mărginită şi continuă (exerciţiu). Funcţia $\hat{x}$ se numeşte **transformata Fourier** a lui x, iar aplicaţia

$$\mathcal{F} : \ell^1(Z) \to \mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$$

se numeşte **transformarea Fourier** pe algebra $\ell^1(Z)$. Este uşor de arătat că $\mathcal{F}$ este liniară şi continuă. Demonstrăm în continuare faptul că $\mathcal{F}$ este multiplicativă:

$$[\mathcal{F}(x \star y)](\lambda) = \sum_{n\in Z}(x \star y)(n)\lambda^{-n} =$$
$$= \sum_{n\in Z}\sum_{k\in Z} x(n-k)y(k)\lambda^{-n} = \sum_{k\in Z}\sum_{m\in Z} x(m)y(k)\lambda^{-k-m} =$$
$$= \left(\sum_{m\in Z} x(m)\lambda^{-m}\right)\left(\sum_{k\in Z} y(k)\lambda^{-k}\right) = (\mathcal{F}x)(\mathcal{F}y) .$$

Schimbarea ordinii de sumare mai sus este corectă deoarece seriile sunt absolut convergente.

Demonstrăm în continuare că mulţimea caracterelor algebrei $\ell^1(Z)$ se poate identifica cu cercul unitate $\mathcal{S}^1$ în modul următor: pentru orice caracter $\psi \in \mathcal{K}(\ell^1(Z))$, există un unic $\zeta \in \mathcal{S}^1$ astfel încât $\psi(x) = \hat{x}(\zeta)$, unde, $\hat{x}$ este transformata Fourier a lui x. Cu identificarea

$$\mathcal{K}(\ell^1(Z)) \ni \psi \leftrightarrow \zeta \in \mathcal{S}^1$$

de mai sus, transformarea Gelfand pe algebra $\ell^1(Z)$ coincide cu transformarea Fourier, $\Gamma : \ell^1(Z) \to \mathcal{C}(\mathcal{S}^1), \Gamma x = \hat{x}$. Acest exemplu sugerează faptul că transformarea Gelfand este o generalizare într-un cadru abstract a tranformatei Fourier; de altfel, o altă notaţie frecvent utilizată pentru Γx este $\hat{x}$.
Demonstrăm mai întâi că pentru orice $\zeta \in \mathcal{S}^1$, aplicaţia $\psi_\zeta : \ell^1(Z) \to C$, $\psi_\zeta(x) = \hat{x}(\zeta)$ este caracter al algebrei $\ell^1(Z)$; pentru orice $x, y \in \ell^1(Z)$, avem:

$$\psi_\zeta(x \star y) = (\widehat{x \star y})(\zeta) = \hat{x}(\zeta)\hat{y}(\zeta) = \psi_\zeta(x)\psi_\zeta(y).$$

Evident, ψ_ζ este liniară şi în plus $\psi_\zeta(\sigma_o) = 1 \neq 0$.
Pentru a demonstra afirmaţia reciprocă, fie $\psi \in \mathcal{K}(\ell^1(Z))$; în particular, ψ este o funcţională liniară şi continuă pe spaţiul Banach $\ell^1(Z)$ şi deci conform exemplului 10(i) din capitolul 3, există şi este unic un şir mărginit $\phi \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât:

$$\psi(x) = \sum_{n\in Z} x(n)\phi(n)\,,\ \forall x \in \ell^1(Z) \tag{4.2}$$

şi $\| \phi \|_\infty = \| \psi \| = 1$. Pentru orice $x \in \ell^1(Z)$ şi $m \in Z$, notăm $x_m(n) = x(n-m)$. Fie $x, y \in \ell^1(Z)$; avem:

$$\sum_{n\in Z} \psi(x)y(n)\phi(n) = \psi(x)\psi(y) = \psi(x \star y) = \sum_{n\in Z}(x \star y)(n)\phi(n) =$$

$$= \sum_{n\in Z} y(n) \sum_{k\in Z} x(k-n)\phi(k) = \sum_{n\in Z} y(n)\psi(x_n).$$

Rezultă că:

$$\psi(x)\phi(n) = \psi(x_n)\,,\ \forall n \in Z. \tag{4.3}$$

Înlocuind în egalitatea de mai sus pe $n \in Z$ cu $n+k \in Z$ (şi deci pe x_n cu x_{n+k}), obţinem:

$$\psi(x)\phi(n+k) = \psi(x_{n+k}) = \psi((x_n)_k) =$$

$$= \psi(x_n)\phi(k) = \psi(x)\phi(n)\phi(k)\,,\ \forall n, k \in Z.$$

Rezultă deci:

$$\phi(n+k) = \phi(n)\phi(k)\,,\ \forall n, k \in Z. \tag{4.4}$$

Din egalitatea (4.4) rezultă că $\phi(-n) = (\phi(n))^{-1}$ şi deoarece $|\phi(n)| \leq 1\,,\ \forall n \in Z$, (pentru că $\| \phi \|_\infty = 1$) rezultă că $|\phi(n)| = 1$, $\forall n \in Z$. În concluzie, ϕ are următoarele proprietăţi:

$$\phi(n+m) = \phi(n)\phi(m) \text{ şi } |\phi(n)| = 1\,,\ \forall n, m \in Z.$$

Notând $\phi(1) = \zeta^{-1} \in \mathcal{S}^1$, rezultă (exerciţiu) că $\phi(n) = \zeta^{-n}\,,\ \forall n \in Z$, şi deci $\psi(x) = \sum_{n\in Z} x(n)\zeta^{-n}$, adică $\psi(x) = \hat{x}(\zeta)$. Lăsăm ca exerciţiu uni-

citatea lui ζ (trebuie demonstrat că dacă $\hat{x}(\zeta_1) = \hat{x}(\zeta_2)$, $\forall x \in \ell^1(Z)$, atunci $\zeta_1 = \zeta_2$).

Pentru a continua studiul transformatei Gelfand, introducem noţiunile de ideal şi algebră cât.

20.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră normată comutativă unitară. O submulţime $\mathcal{I} \subseteq \mathcal{A}$ se numeşte **ideal** (în $\mathcal{A}$) dacă:
(i) $\mathcal{I}$ este subspaţiu vectorial.
(ii) $\forall x \in \mathcal{I}$ şi $\forall y \in \mathcal{A}$ rezultă $xy \in \mathcal{I}$.
Dacă $\mathcal{I} \neq \mathcal{A}$, atunci $\mathcal{I}$ se numeşte **ideal propriu**. Dacă $\mathcal{I}$ nu este conţinut în nici un alt ideal propriu, atunci el se numeşte **ideal maximal**. Dacă idealul $\mathcal{I}$ este şi submulţime închisă în $\mathcal{A}$, atunci $\mathcal{I}$ se numeşte **ideal închis**. Să mai facem observaţia că într-un ideal propriu nu există elemente inversabile (dacă un ideal conţine elemente inversabile, atunci el coincide cu algebra $\mathcal{A}$).

21.Teoremă
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară. Atunci orice ideal propriu este conţinut într-un ideal maximal şi orice ideal maximal este închis.
Demonstraţie Fie $\mathcal{I}$ un ideal propriu în $\mathcal{A}$ şi fie:

$$\mathcal{M} = \{\mathcal{J} \subset \mathcal{A}\,;\, \mathcal{J} \text{ ideal propriu şi } \mathcal{J} \supseteq \mathcal{I}\}.$$

Atunci $(\mathcal{M}, \subseteq)$ este mulţime parţial ordonată. Arătăm că $\mathcal{M}$ este inductiv ordonată; pentru aceasta, fie $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ o submulţime total ordonată şi fie $\mathcal{Z} = \bigcup_{\mathcal{J} \in \mathcal{N}} \mathcal{J}$. Se demonstrează fără dificultate că $\mathcal{Z}$ este un element maximal al lui $\mathcal{N}$. Conform lemei lui Zorn (lema 16,cap.3) rezultă că există un ideal maximal care-l conţine pe $\mathcal{I}$; să mai observăm că până aici nu am folosit completitudinea algebrei $\mathcal{A}$. Fie acum $\mathcal{Y}$ un ideal maximal în $\mathcal{A}$ şi fie $\overline{\mathcal{Y}}$ închiderea sa. Folosind completitudinea algebrei $\mathcal{A}$ se demonstrează simplu că $\overline{\mathcal{Y}}$ este de asemenea ideal. Dacă prin absurd $\overline{\mathcal{Y}} = \mathcal{A}$, atunci $e \in \overline{\mathcal{Y}}$. Ar exista deci un şir $x_n \in \mathcal{Y}$ (deci implicit nici unul din termenii şirului x_n nu este inversabil) astfel încât $\lim_{n\to\infty} x_n = e$. Rezultă deci că în orice vecinătate a lui e există elemente neinversabile, ceea ce constituie o contradicţie cu faptul că mulţimea elementelor inversabile este deschisă (propoziţia 5). În concluzie, $\overline{\mathcal{Y}}$ este ideal propriu şi (evident) îl conţine pe $\mathcal{Y}$ care este (din ipoteză) maximal; rezultă deci că $\mathcal{Y} = \overline{\mathcal{Y}}$, adică $\mathcal{Y}$ este mulţime închisă.
Definim în continuare noţiunea de algebră cât.

22.Definiţie

Fie $\mathcal{A}$ o algebră comutativă (nu neapărat normată) şi fie $\mathcal{J}$ un ideal propriu în $\mathcal{A}$. Relaţia de echivalenţă (pe $\mathcal{A}$) indusă de $\mathcal{J}$ este definită prin $x \sim y \Leftrightarrow x - y \in \mathcal{J}$; clasa de echivalenţă a elementului x este $\tilde{x} = x + \mathcal{J} = \{x + y\,;\, y \in \mathcal{J}\}$. Mulţimea claselor de echivalenţă, notată $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ se organizează ca spaţiu vectorial cu operaţiile: $\tilde{x} + \tilde{y} = \widetilde{x+y}$ şi $\lambda\tilde{x} = \widetilde{\lambda x}$, $\forall x, y \in \mathcal{A}$, $\forall \lambda \in C$, ([1],p.37). Vectorul nul în $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ este $\tilde{0} = \mathcal{J}$. Este evident că până aici construcţia coincide cu cea din teoria spaţiilor vectoriale (deci ar fi fost suficient ca $\mathcal{J}$ să fi fost doar un subspaţiu vectorial). Definim în continuare structura de algebră pe spaţiul vectorial $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Pentru aceasta, să observăm că dacă $x_1 \sim x_2$ şi $y_1 \sim y_2$, atunci din identitatea

$$x_2 y_2 - x_1 y_1 = (x_2 - x_1) y_2 + x_1 (y_2 - y_1)\,,$$

rezultă $x_1 y_1 \sim x_2 y_2$, ceea ce permite definirea înmulţirii în $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ prin formula $\tilde{x}\tilde{y} = \widetilde{xy}$. Se demonstrează că $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ împreună cu aceste operaţii este algebră comutativă; în plus, aplicaţia $\mathcal{A} \ni x \to \tilde{x} \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$ este morfism de algebre având drept nucleu idealul $\mathcal{J}$.
Dacă $\mathcal{A}$ are unitatea e, atunci $\tilde{e}$ este unitate în algebra $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Numim $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ **algebra cât** definită de idealul $\mathcal{J}$.

23.Propoziţie
Fie $\mathcal{A}$ algebră comutativă cu unitate şi fie $\mathcal{J}$ un ideal propriu în $\mathcal{A}$. Atunci algebra cât $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ este corp dacă şi numai dacă idealul $\mathcal{J}$ este maximal.
Demonstraţie Fie $\mathcal{J}$ un ideal maximal şi fie, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, $\mathcal{I}(x) = \{ax + y\,;\, a \in \mathcal{A}\,,\, y \in \mathcal{J}\}$; atunci $\mathcal{I}(x)$ este ideal (ceea ce se demonstrează imediat) şi în plus $\mathcal{I}(x)$ îl conţine strict pe $\mathcal{J}$ (de exemplu $x \in \mathcal{I}(x) - \mathcal{J}$). Deoarece $\mathcal{J}$ este maximal, rezultă că $\mathcal{I}(x) = \mathcal{A}$, deci există $a \in \mathcal{A}$ şi $y \in \mathcal{J}$ astfel încât $ax + y = e$, adică $\widetilde{ax} + \tilde{y} = \tilde{e}$. Dar, deoarece $y \in \mathcal{J}$, rezultă că $\tilde{y} = \tilde{0}$ şi deci $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{e}$, ceea ce arată că $\tilde{x}$ este element inversabil în algebra cât $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Cum x a fost un element arbitrar din $\mathcal{A} - \mathcal{J}$, rezultă că toate elementele nenule din $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ sunt inversabile, deci această algebră este corp.
Pentru a demonstra afirmaţia reciprocă, să presupunem că idealul $\mathcal{J}$ nu este maximal. Vom arăta că există în $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ elemente nenule neinversabile. Fie $x \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$ (deci $\tilde{x} \neq \tilde{0}$); fie $\mathcal{I}(x) = \{ax + y\,;\, a \in \mathcal{A}\,,\, y \in \mathcal{J}\}$. Se poate demonstra (exerciţiu) că putem alege $x \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$ astfel încât idealul $\mathcal{I}(x)$ să nu fie maximal (se foloseşte faptul că $\mathcal{J}$ nu este maximal). Pentru un astfel de x ales, rezultă că $e \notin \mathcal{I}(x)$, deci nu există $a \in \mathcal{A}$ astfel încât $\tilde{a}\tilde{x} = \tilde{e}$, ceea ce arată că $\tilde{x}$ nu este inversabil în algebra cât $\mathcal{A}/\mathcal{J}$.

24.Propoziţie
Fie $(\mathcal{A}\,,\, \|\,\|)$ un spaţiu normat şi fie $\mathcal{J}$ un subspaţiu vectorial închis în $\mathcal{A}$. Pentru orice $\tilde{x} \in \mathcal{A}/\mathcal{J}$, definim:

$$\| \tilde{x} \| = \inf_{y \in \mathcal{J}} \| x + y \| = \inf\{\| z \|\,;\, z \in \mathcal{A}\,,\, z \sim x\}.$$

Atunci:
(i) $(\mathcal{A}/\mathcal{J}\,,\, \|\,\|)$ este spaţiu normat.
(ii) Dacă $\mathcal{A}$ este spaţiu Banach, atunci $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ este spaţiu Banach.
(iii) Dacă $\mathcal{A}$ este algebră Banach comutativă şi $\mathcal{J}$ este un ideal propriu închis, atunci $\mathcal{A}/\mathcal{J}$ este algebră Banach comutativă. Dacă în plus $\mathcal{A}$ este algebră unitară, atunci $\| \tilde{e} \| = 1$.
Demonstraţie (i) Dacă $x \in \mathcal{J}$, atunci $\| \tilde{x} \| = 0$; dacă $x \notin \mathcal{J}$, atunci $\| \tilde{x} \| > 0$, deoarece $\mathcal{J}$ este mulţime închisă (lăsăm ca exerciţiu observaţia că $\| \tilde{x} \|$ este distanţa de la x la $\mathcal{J}$). Dacă $\lambda \in C$ şi $x \in \mathcal{A}$, atunci egalitatea $\| \lambda\tilde{x} \| = |\lambda| \, \| \tilde{x} \|$ se verifică imediat. Demonstrăm acum inegalitatea triunghiului; fie $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ şi fie $\epsilon > 0$. Din definiţie, rezultă că există $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$ astfel încât:

$$\| x_\imath + y_\imath \| < \| \tilde{x_\imath} \| + \epsilon\,,\ \forall \imath = 1, 2.$$

Însumând cele două inegalităţi de mai sus, rezultă:

$$\| x_1 + y_1 \| + \| x_2 + y_2 \| \leq \| \tilde{x_1} \| + \| \tilde{x_2} \| + 2\epsilon.$$

Folosind şi inegalităţile evidente:

$$\| \tilde{x_1} + \tilde{x_2} \| \leq \| x_1 + y_1 + x_2 + y_2 \| \leq \| x_1 + y_1 \| + \| x_2 + y_2 \|,$$

rezultă:

$$\| \tilde{x_1} + \tilde{x_2} \| \leq \| \tilde{x_1} \| + \| \tilde{x_2} \| + 2\epsilon,$$

şi deci, pentru $\epsilon \to 0$, obţinem $\| \tilde{x_1} + \tilde{x_2} \| \leq \| \tilde{x_1} \| + \| \tilde{x_2} \|$.
(ii) Presupunem că $\mathcal{A}$ este spaţiu Banach şi fie $(\widetilde{x_n})_n$ un şir Cauchy în $\mathcal{A}/\mathcal{J}$. Cu procedeul obişnuit ([8],p.21; [3],p.26) extragem un subşir $\widetilde{x_{n_i}} \subseteq \widetilde{x_n}$ astfel încât $\| \widetilde{x_{n_i}} - \widetilde{x_{n_{i+1}}} \| \leq 2^{-i}$, $\forall i \in N$. Fie $z_i \in \widetilde{x_{n_i}}$ astfel încât $\| z_i - z_{i+1} \| \leq 2^{-i}$; atunci $(z_i)_i$ este un şir Cauchy în $\mathcal{A}$ şi deci există $z \in \mathcal{A}$ astfel încât $z = \lim\limits_{i\to\infty} z_i$; din definiţia normei pe $\mathcal{A}/\mathcal{J}$, rezultă:

$$\| \widetilde{x_{n_i}} - \tilde{z} \| \leq \| z_i - z \|,$$

şi deci $\lim\limits_{i\to\infty} \widetilde{x_{n_i}} = \tilde{z}$, ceea ce încheie demonstraţia (un şir Cauchy care conţine un subşir convergent, este convergent).
(iii) Trebuie să demonstrăm că $\| \widetilde{x_1}\widetilde{x_2} \| \leq \| \widetilde{x_1} \| \| \widetilde{x_2} \|$, $\forall x_1, x_2 \in \mathcal{A}$. Pentru aceasta, fie $x_1, x_2 \in \mathcal{A}$ şi $\epsilon > 0$; fie, ca în demonstraţia punctului **(i)**, $y_1, y_2 \in \mathcal{J}$ care verifică:

$$\| x_i + y_i \| \leq \| \widetilde{x_i} \| + \epsilon\,,\ \forall i = 1, 2. \tag{4.5}$$

Să mai observăm că:

$$(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1x_2 + y_1(x_2 + y_2) + x_1y_2 \in x_1x_2 + \mathcal{J},$$

deci, din definiţia normei pe $\mathcal{A}/\mathcal{J}$, avem:

$$\| \widetilde{x_1x_2} \| \leq \| (x_1 + y_1)(x_2 + y_2 \| \leq \| x_1 + y_1 \| \| x_2 + y_2 \| .$$

Folosind acum inegalitatea rezultată prin înmulţirea inegalităţilor (4.5), avem:

$$\| \widetilde{x_1x_2} \| \leq \| \widetilde{x_1} \| \| \widetilde{x_2} \| + \epsilon(\| \widetilde{x_1} \| + \| \widetilde{x_2} \| + \epsilon),$$

ceea ce încheie demonstraţia deoarece ϵ a fost arbitrar.
Dacă e este elementul unitate al algebrei $\mathcal{A}$, atunci $e \in \tilde{e}$ şi deci $\| \tilde{e} \| \leq \| e \| = 1$. Pentru cealaltă inegalitate, fie $x \in \mathcal{A} - \mathcal{J}$; avem:

$$\| \tilde{x} \| = \| \widetilde{xe} \| \leq \| \tilde{x} \| \| \tilde{e} \| .$$

De aici, deoarece $\| \tilde{x} \| \neq 0$, rezultă $\| \tilde{e} \| \geq 1$.
Revenim acum la studiul algebrelor Banach comutative unitare şi demonstrăm următorul rezultat important.

25.Teoremă
(a) Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară. Atunci, pentru orice $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, subspaţiul $\mathrm{Ker}(\psi)$ este ideal maximal în $\mathcal{A}$.
(b) Reciproc, pentru orice ideal maximal $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, există $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ astfel încât $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}(\psi)$.
Demonstraţie (a) Fie $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$, $a \in \mathrm{Ker}(\psi)$ şi $x \in \mathcal{A}$. Deoarece $\psi(ax) = \psi(a)\psi(x) = 0$, rezultă că $\mathrm{Ker}(\psi)$ este ideal; în plus, el este şi propriu pentru că $e \notin \mathrm{Ker}(\psi)$. Presupunem prin absurd că $\mathrm{Ker}(\psi)$ nu ar fi ideal maximal; atunci, conform teoremei 21, există un ideal maximal $\mathcal{M} \subset \mathcal{A}$, astfel încât $\mathrm{Ker}(\psi) \subset \mathcal{M}$ (incluziunea fiind strictă).
Fie $a \in \mathcal{M} - \mathrm{Ker}(\psi)$; deoarece $\psi(e-(\psi(a))^{-1}a) = 0$, rezultă că $e-(\psi(a))^{-1}a \in \mathrm{Ker}(\psi) \subset \mathcal{M}$.
Din egalitatea evidentă: $e = (e - (\psi(a))^{-1}a) + (\psi(a))^{-1}a$, rezultă că $e \in \mathcal{M}$ (deoarece este combinaţie liniară a două elemente din $\mathcal{M}$); aceasta este în contradicţie cu faptul că un ideal propriu nu conţine elemente inversabile.
(b) Demonstrăm acum afirmaţia reciprocă; fie $\mathcal{M}$ un ideal maximal în $\mathcal{A}$. Conform propoziţiei 23 ($\mathcal{M}$ este maximal) şi propoziţiei 24(iii) ($\mathcal{M}$ este închis) rezultă că $\mathcal{A}/\mathcal{M}$ este corp Banach. Din teorema Gelfand-Mazur (corolarul 11) rezultă că există un izomorfism (canonic) de corpuri Banach $\Phi : \mathcal{A}/\mathcal{M} \to C$. Fie $g : \mathcal{A} \to \mathcal{A}/\mathcal{M}$, $g(x) = \tilde{x}$ şi fie $\psi = \Phi \circ g$. Lăsăm ca exerciţiu faptul că ψ este caracter. Arătăm acum (prin dublă incluziune) egalitatea $\mathrm{Ker}(\psi) = \mathcal{M}$. Fie $x \in \mathcal{M}$; atunci $g(x) = 0$ şi deci $\psi(x) = 0$, adică $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$. Fie acum $x \in \mathrm{Ker}(\psi)$; atunci $\psi(x) = 0$, şi deci (deoarece Φ este injectivă) rezultă că $g(x) = 0$, adică $x \in \mathcal{M}$, ceea ce încheie demonstraţia.
Putem completa acum proprietăţile transformării Gelfand (prezentate în propoziţia 18) cu următorul rezultat fundamental.

26.Teoremă (Gelfand)
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară; atunci:
(i) $\sigma(x) = \{\lambda \in C\,;\, \exists \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \text{ astfel încât } \psi(x) = \lambda\} = (\Gamma(x))\,(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$.
(ii) $\| \Gamma(x) \|_\infty = \mathrm{r}(x)\,,\ \forall x \in \mathcal{A}$.
Notaţiile sunt cele din definiţia 17: $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ este transformarea Gelfand pe algebra $\mathcal{A}$, $\sigma(x)$ este spectrul elementului $x \in \mathcal{A}$, iar $\mathrm{r}(x)$ este raza sa spectrală . Înainte de a demonstra teorema, vom face câteva observaţii în legătură cu enunţul. Evident, **(ii)** este o consecinţă imediată a lui **(i)**. Afirmaţia **(i)** se poate reformula şi astfel: x este element inversabil în algebra $\mathcal{A}$ dacă şi numai dacă $\Gamma(x)$ este funcţie inversabilă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$. Pe de altă parte, elementele inversabile din algebra funcţiilor continue au fost caracterizate în exemplul 9(ii), (a se vedea şi exemplul 19(i)). În concluzie, transformarea Gelfand permite caracterizarea elementelor inversabile din algebra comutativă unitară abstractă $\mathcal{A}$ cu ajutorul elementelor inversabile

dintr-o algebră concretă: $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$; mai adăugăm că, în general, Γ nu este izomorfism de algebre Banach. În paragraful următor vom studia o clasă de algebre pentru care transformarea Gelfand este izomorfism.
Demonstraţie Fie $x \in \mathcal{A}$. Incluziunea

$$\sigma(x) \supseteq \{\lambda \in C\,;\, \exists \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A}) \text{ astfel încât } \psi(x) = \lambda\}$$

a fost demonstrată în propoziţia 16. Fie acum $\lambda \in \sigma(x)$; atunci, elementul $\lambda e - x$ nu este inversabil. Fie $\mathcal{J} = \{(\lambda e - x)y\,;\, y \in \mathcal{A}\}$; atunci $\mathcal{J}$ este ideal propriu în $\mathcal{A}$ (exerciţiu). Din teorema 21 rezultă că există un ideal maximal $\mathcal{M}$ care-l conţine pe $\mathcal{J}$; conform teoremei 25(b), rezultă că există $\psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ astfel încât $\mathcal{M} = \mathrm{Ker}(\psi)$. In concluzie, există un caracter ψ astfel încât $\mathcal{J} \subseteq \mathrm{Ker}(\psi)$, deci $\psi(\lambda e - x) = 0$. Rezultă deci că $\lambda = \psi(x)$, ceea ce încheie demonstraţia.
Prezentăm în continuare o aplicaţie remarcabilă a teoremei lui Gelfand, cunoscută sub numele de teorema de transformare a spectrului.

27.Definiţie
Fie f o funcţie întreagă, deci există un şir de numere complexe a_n astfel încât $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, pentru orice $z \in C$. Dacă $\mathcal{A}$ este o algebră Banach comutativă unitară, atunci pentru orice $x \in \mathcal{A}$, seria $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ este absolut convergentă; vom nota suma acestei serii cu $f(x)$. Un caz particular remarcabil este funcţia exponenţială: $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$.

28.Teoremă (de transformare a spectrului)
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach comutativă unitară şi f o funcţie întreagă. Atunci, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, avem:

$$\sigma(f(x)) = \{f(\lambda)\,;\, \lambda \in \sigma(x)\}.$$

Demonstraţie Din teorema 26, rezultă:

$$\sigma(f(x)) = (\Gamma(f(x))(\mathcal{K}(\mathcal{A}))) =$$

$$= \{\psi(f(x))\,;\, \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})\} = \{f(\psi(x))\,;\, \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})\} = f(\sigma(x)).$$

4.3 $C^\star$-algebre comutative

29.Definiţie
Fie $\mathcal{A}$ o algebră Banach (nu neapărat comutativă). O aplicaţie

$\star : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ se numeşte **involuţie** (pe $\mathcal{A}$) dacă satisface următoarele condiţii:
(i) $(x^\star)^\star = x$,
(ii)$(\alpha x + \beta y)^\star = \overline{\alpha} x^\star + \overline{\beta} y^\star$,
(iii) $(xy)^\star = y^\star x^\star$,
pentru orice $\alpha, \beta \in C$ şi $x, y \in \mathcal{A}$. În acest caz $(\mathcal{A}, \star)$ se numeşte **algebră Banach cu involuţie**. Dacă în plus are loc şi egalitatea:
(iv) $\| x^\star x \| = \| x \|^2, \forall x \in \mathcal{A}$,
atunci $\mathcal{A}$ se numeşte **$C^\star$-algebră**. Două algebre cu involuţie, $\mathcal{A}_1$ şi $\mathcal{A}_2$ se numesc izomorfe dacă există un izomorfism de algebre Banach $F : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ cu proprietatea: $(F(x))^\star = F(x^\star)$, $\forall x \in \mathcal{A}_1$.
Într-o algebră cu involuţie se pot defini câteva clase de elemente cu proprietăţi remarcabile:
(a) $x \in \mathcal{A}$ se numeşte **autoadjunct** dacă $x^\star = x$.
(b) $x \in \mathcal{A}$ se numeşte **normal** dacă $x^\star x = x x^\star$.
(c) Dacă în plus algebra are şi unitate, atunci $x \in \mathcal{A}$ se numeşte **unitar** dacă $x^{-1} = x^\star$.

30.Observaţie
Din egalitatea **(iii)** de mai sus rezultă că x este inversabil dacă şi numai dacă $x^\star$ este inversabil şi în acest caz $(x^\star)^{-1} = (x^{-1})^\star$. Este de asemenea evident că pentru orice $x \in \mathcal{A}$, următoarele elemente sunt autoadjuncte: $x^\star x$, $x x^\star$, $\frac{1}{2}(x + x^\star)$, $\frac{1}{2i}(x - x^\star)$; rezultă că orice element $x \in \mathcal{A}$ se poate scrie în mod unic sub forma $x = h + ik$, cu h şi k autoadjuncte (evident $h = \frac{1}{2}(x + x^\star)$ şi $k = \frac{1}{2i}(x - x^\star)$). În plus, x este normal dacă şi numai dacă $hk = kh$.

31.Propoziţie
Într-o $C^\star$-algebră $\mathcal{A}$ are loc egalitatea $\| x^\star \| = \| x \|$, $\forall x \in \mathcal{A}$; în consecinţă, involuţia este aplicaţie continuă.
Demonstraţie Din inegalitatea $\| x \|^2 = \| x^\star x \| \leq \| x^\star \| \| x \|$, rezultă că $\| x \| \leq \| x^\star \|$; înlocuind în ultima inegalitate pe x cu $x^\star$ şi folosind egalitatea $(x^\star)^\star = x$, rezultă $\| x^\star \| \leq \| x \|$, ceea ce încheie demonstraţia. Pentru a demonstra continuitatea involuţiei, fie $(x_n)_n$ un şir din $\mathcal{A}$ care converge la x. Atunci $(x_n^\star)_n$ converge la $x^\star$ deoarece

$$\| x_n^\star - x^\star \| = \| (x_n - x)^\star \| = \| x_n - x \| \to 0.$$

32.Exemple
(i) Cel mai simplu exemplu de $C^\star$-algebră comutativă unitară este algebra numerelor complexe, C. Involuţia este conjugarea complexă, elementele autoadjuncte sunt numerele reale, iar elementele unitare

sunt numerele complexe de modul 1.

(ii) Algebra Banach a funcţiilor continue, $\mathcal{C}(\mathcal{D})$, din exemplul 2(i) este $C^\star$-algebră cu involuţia $f^\star = \overline{f}$, unde, $\overline{f}(x) = \overline{f(x)}$. Elementele autoadjuncte sunt funcţiile cu valori reale, iar elementele unitare sunt funcţiile ale căror valori au modulul 1.

(iii) Un exemplu important de $C^\star$-algebră necomutativă este $\mathcal{L}(C^n)$, $T^\star$ fiind adjunctul operatorului T. Operatorii autoadjuncţi, normali şi unitari au fost studiaţi în capitolul 2. În capitolul următor vom studia $C^\star$-algebra operatorilor liniari şi continui definiţi pe un spaţiu Hilbert infinit dimensional.

(iv) Algebra Banach (cu operaţia de convoluţie) a şirurilor absolut sumabile, $\ell^1(Z)$ este $C^\star$-algebră cu involuţia $\alpha \longrightarrow \overline{\alpha}$.

(v) Tot conjugarea complexă este involuţie şi în algebra Banach a şirurilor mărginite, $\ell^\infty(Z)$.

(vi) Mai general, algebra Banach a funcţiilor esenţial mărginite, $L^\infty(\Omega, \mu)$ este şi ea $C^\star$-algebră comutativă cu conjugarea complexă: $f \to \overline{f}$; a se vedea exemplul 2(v).

33.Definiţie
Într-o algebră Banach, funcţia exponenţială se poate defini în mod natural prin relaţia $\exp(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$, seria din membrul drept fiind absolut convergentă (a se vedea şi definiţia 27).
Identitatea $\exp(x + y) = \exp(x)\exp(y)$ este adevărată numai în ipoteza că elementele x şi y comută între ele. Dacă t este un număr real, atunci e^{it} este un număr complex de modul 1; într-o $C^\star$-algebră această proprietate elementară se generalizează astfel:

34.Lemă
Fie $\mathcal{A}$ o $C^\star$-algebră unitară şi fie $h \in \mathcal{A}$ un element autoadjunct.
Atunci elementul $\exp(ih)$ este unitar.
Demonstraţie Adjunctul elementului $\exp(ih)$ este:

$$[\exp(ih)]^\star = [\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(ih)^n]^\star = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i)^n}{n!} h^n = \exp(-ih),$$

comutarea involuţiei cu seria fiind justificată de continuitatea involuţiei (propozi-

tia 31). Deoarece elementele ih şi $-ih$ comută între ele, avem:

$$[\exp(ih)][\exp(-ih)]^\star = [\exp(ih)][\exp(-ih)] = \exp(ih - ih) =$$

$$= e = [\exp(-ih)][\exp(ih)] = [\exp(ih)]^\star[\exp(-ih)],$$

ceea ce încheie demonstraţia.

În capitolul 2 am văzut că operatorii autoadjuncţi din $\mathcal{L}(C^n)$ au valori proprii reale, iar din exemplele 9(ii) şi 32(ii) rezultă că orice element autoadjunct al algebrei funcţiilor continue are spectru real; în general, avem:

35.Propoziţie
Fie $\mathcal{A}$ o $C^\star$-algebră unitară.
(i) Dacă $u \in \mathcal{A}$ este unitar, atunci $\| u \| = 1$ şi $\sigma(u) \subseteq \{\lambda \in C; |\lambda| = 1\}$.
(ii) Orice element autoadjunct din $\mathcal{A}$ are spectru real.
Demonstraţie (i) Dacă $u \in \mathcal{A}$ este unitar, atunci $u^\star = u^{-1}$ şi deci $\| u \|^2 = \| u^\star u \| = \| e \| = 1$, şi deci $\| u \| = 1$. Evident, deoarece u^{-1} este şi el unitar, rezultă şi $\| u^{-1} \| = 1$. Fie acum $\lambda \in \sigma(u)$; conform observaţiei 8 avem $\lambda^{-1} \in \sigma(u^{-1})$ şi deci deoarece $\| u \| = \| u^{-1} \| = 1$, rezultă $|\lambda| \leq 1$ şi $|\lambda^{-1}| \leq 1$, adică $|\lambda| = 1$.
(ii) Fie $h \in \mathcal{A}$ autoadjunct; din lema 34 rezultă că $\exp(ih)$ este unitar şi deci din **(i)** rezultă că $\sigma(\exp(ih))$ este inclus în cercul unitate. Din teorema 28 (de transformare a spectrului) aplicată funcţiei exponenţiale rezultă $\sigma(\exp(ih)) = \{e^{i\lambda}; \lambda \in \sigma(h)\}$. În concluzie, am obţinut că
$\lambda \in \sigma(h) \Rightarrow |e^{i\lambda}| = 1$, adică $\lambda \in R$.

Putem demonstra acum următorul rezultat fundamental în legătură cu reprezentarea $C^\star$-algebrelor comutative unitare.

36.Teoremă (Gelfand-Naimark)
Fie $\mathcal{A}$ o $C^\star$-algebră Banach comutativă unitară. Atunci transformarea Gelfand $\Gamma : \mathcal{A} \to \mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ este un izomorfism de $C^\star$-algebre unitare.
Demonstraţie Faptul că Γ este morfism de algebre a fost demonstrat în propoziţia 18; mai trebuie deci demonstrate proprietăţile:
(a) $\overline{\Gamma(x)} = \Gamma(x^\star)$; reamintim că involuţia în algebra funcţiilor continue este conjugarea complexă, cf. exemplului 32(ii).
(b) $\| \Gamma(x) \|_\infty = \| x \|$.
(c) Γ este aplicaţie surjectivă.
Fie $x \in \mathcal{A}$, $x = h + ik$ cu $h = h^\star$ şi $k = k^\star$; atunci $x^\star = h - ik$. Deoarece h şi k sunt autoadjuncte, din propoziţia 35(ii) rezultă că spectrele lor sunt reale

şi deci din teorema 26 rezultă că funcţiile continue $\Gamma(h)$ şi $\Gamma(k)$ iau valori reale, deci $\overline{\Gamma(h)} = \Gamma(h)$ şi $\overline{\Gamma(k)} = \Gamma(k)$. Din aceste observaţii rezultă:

$$\overline{\Gamma(x)} = \overline{\Gamma(h+ik)} = \overline{\Gamma(h) + i\Gamma(k)} = \Gamma(h) - i\Gamma(k) = \Gamma(h-ik) = \Gamma(x^\star).$$

Pentru a demonstra **(b)**, să observăm mai întâi că într-o $C^\star$-algebră comutativă raza spectrală coincide cu norma; într-adevăr, pentru orice $x \in \mathcal{A}$, avem:

$$\| x^2 \|^2 = \| x^2 (x^2)^\star \| = \| x^2 (x^\star)^2 \| = \| x x^\star (x x^\star)^\star \| = \| x x^\star \|^\star = \| x \|^4,$$

deci $\| x^2 \| = \| x \|^2$; prin inducţie rezultă $\| x^{2^n} \| = \| x \|^{2^n}$, $\forall n \in N$. Folosind acum formula razei spectrale (teorema 13), rezultă:

$$\mathrm{r}(x) = \lim_{n\to\infty} \| x^{2^n} \|^{2^{-n}} = \lim_{n\to\infty} (\| x \|^{2^n})^{2^{-n}} = \| x \| .$$

Punctul **(b)** rezultă acum din teorema 26: $\| \Gamma(x) \|_\infty = \mathrm{r}(x) = \| x \|$. Pentru a demonstra **(c)**, observăm mai întâi că $\Gamma(\mathcal{A})$ este o subalgebră închisă în $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$: este subalgebră deoarece Γ este morfism şi este închisă deorece Γ este izometrie (lăsăm detaliile ca exerciţiu). Vom demonstra acum că $\Gamma(\mathcal{A})$ este şi densă în $\mathcal{C}(\mathcal{K}(\mathcal{A}))$ (ceea ce va încheia demonstraţia); pentru aceasta, vom folosi Teorema Stone-Weierstrass (exemplul 2(ii)). Subalgebra $\Gamma(\mathcal{A})$ este închisă la conjugare
(deoarece $\Gamma(x^\star) = \overline{\Gamma(x)}$), conţine constantele (deoarece $\Gamma(e) = 1$) şi separă punctele din $\mathcal{K}(\mathcal{A})$: dacă $\phi, \psi \in \mathcal{K}(\mathcal{A})$ cu $\phi \neq \psi$, atunci există $x \in \mathcal{A}$ astfel încât $\phi(x) \neq \psi(x)$, adică $(\Gamma(x))(\phi) \neq (\Gamma(x))(\psi)$. Ipotezele teoremei Stone-Weierstrass sunt verificate, deci demonstraţia este încheiată.

37.Exemplu
Să considerăm $C^\star$-algebra comutativă unitară (cu convoluţia) a şirurilor absolut sumabile, $\ell^1(Z)$, (cf. exemplelor 2(vi) şi 32(iv)). Am văzut în exemplul 19(ii) că spaţiul caracterelor acestei algebre se poate identifica cu cercul unitate, $\mathcal{S}^1$, astfel: pentru orice caracter $\psi \in \mathcal{K}(\ell^1(Z))$, există un unic $\zeta \in \mathcal{S}^1$ astfel încât $\psi(x) = \hat{x}(\zeta)$, unde, $\hat{x}$ este transformarea Fourier a lui x, adică $\hat{x} : \mathcal{S}^1 \to C$, $\hat{x}(\lambda) = \sum_{n\in Z} x(n)\lambda^{-n}$. Din teorema lui Gelfand rezultă deci că un şir $x \in \ell^1(Z)$ este inversabil (faţă de operaţia de convoluţie) dacă şi numai dacă transformata sa Gelfand (Fourier) $\widehat{x}$ nu se anulează pe cercul unitate (conform condiţiei de inversabilitate în algebra funcţiilor continue). Obţinem astfel următorul rezultat remarcabil:

Teoremă (Wiener)
Fie $a \in \ell^1(Z)$ şi fie $f(t) = \sum_{n\in Z} a(n)e^{-int}$; evident, seria este absolut şi uniform convergentă pe $\mathcal{S}^1$, deci defineşte o funcţie $f \in \mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$.

Dacă f nu se anulează pe cercul unitate (deci f este inversabilă în algebra $\mathcal{C}(\mathcal{S}^1)$) atunci funcţia $\frac{1}{f}$ admite şi ea o dezvoltare în serie Fourier (de asemenea absolut convergentă), adică există $b \in \ell^1(Z)$ astfel încât:

$$\frac{1}{f}(e^{it}) = \sum_{n \in Z} b(n) e^{-int}, \ \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Capitolul 5

Operatori pe spaţii Hilbert

În acest capitol vom studia operatorii liniari şi continui definiţi pe un spaţiu Hilbert infinit dimensional. Aşa cum am văzut în capitolul 3 şi în exemplul 2(ii) din cap.4, dacă X este un spaţiu Banach, atunci $\mathcal{L}(X)$ este o algebră Banach (necomutativă) unitară. Dacă $X = H$ este spaţiu Hilbert, atunci pe $\mathcal{L}(H)$ se poate defini o structură de $C^{\star}$-algebră, ceea ce permite un studiu mai aprofundat al unor clase speciale de operatori (normali, autoadjuncţi, unitari, pozitivi, proiectori). Reamintim că în cazul finit dimensional, $H = C^n$, acest studiu a fost făcut în cap.2. De altfel ideea principală care a stat la baza expunerii ce urmează este de a pune în evidenţă felul în care dimensiunea infinită a lui H modifică (sau nu) rezultatele importante din capitolul 2.

5.1 Adjunctul unui operator

În continuare H va fi un spaţiu Hilbert (complex) infinit dimensional şi separabil, iar $\mathcal{L}(H)$ algebra Banach a operatorilor liniari şi continui pe spaţiul H. În capitolul 2 am asociat oricărui operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator $T^{\star}$ numit adjunctul lui T, urmând ca existenţa şi proprietăţile sale să fie demonstrate în contextul unui spaţiu Hilbert infinit dimensional. Reamintim de asemenea că în capitolul 3, (teorema 29 şi definiţia 30) am definit adjunctul unui operator între două spaţii normate, particularizând apoi definiţia pentru spaţii Hilbert. Demonstraţia care urmează este totuşi independentă de cea din capitolul 3 (care folosea în mod esenţial teorema Hahn-Banach).

1.Propoziţie
Pentru orice operator $T \in \mathcal{L}(H)$, există şi este unic un operator $T^{\star} \in \mathcal{L}(H)$ cu proprietăţile:

(i) $< Tx, y > = < x, T^\star y >, \forall x, y \in H.$
(ii) $(T^\star)^\star = T.$
(iii) $\| T \| = \| T^\star \|$.
(iv) $\| T \|^2 = \| T^\star T \|$.
Operatorul $T^\star$ se numeşte **adjunctul** lui T; facem precizarea că pentru unicitatea sa este suficientă egalitatea **(i)**.
Demonstraţie În continuare vom folosi deseori implicaţia:
dacă $< u, v > = < u, w >, \forall u \in H$, atunci $v = w$. Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ şi fie $y \in H$ un vector arbitrar fixat. Aplicaţia $f : H \to C$, $f(x) = < Tx, y >$ este o funcţională liniară şi continuă pe H (liniaritatea este evidentă iar continuitatea rezultă din inegalitatea: $| < Tx, y > | \leq \| T \| \| x \| \| y \|$). Conform teoremei lui Riesz de reprezentare a funcţionalelor liniare şi continue pe un spaţiu Hilbert (teorema13, cap.1), există un unic vector $z \in H$ astfel încât $f(x) = < x, z >$; evident, z depinde de T şi y. Fie operatorul $T^\star : H \to H$, definit prin $T^\star y = z$. Este evident că $T^\star$ este liniar şi că verifică relaţia **(i)**. Continuitatea lui $T^\star$ rezultă din inegalitatea :

$$\| T^\star y \|^2 = < T^\star y, T^\star y > = < TT^\star y, y > \leq \| T \| \| T^\star y \| \| y \| , \forall y \in H.$$

Am demonstrat deci că $T^\star \in \mathcal{L}(H)$ şi $\| T^\star y \| \leq \| T \| \| y \|$, ceea ce arată că $\| T^\star \| \leq \| T \|$. Pentru a demonstra că $T^\star$ este unic cu proprietatea **(i)**, să presupunem prin absurd că există $S \in \mathcal{L}(H)$, $S \neq T^\star$, astfel încât $< Tx, y > = < x, Sy >$. Rezultă aşadar că $< x, Sy > = < x, T^\star y >$ pentru orice $x, y \in H$, deci $S = T^\star$, contradicţie cu ipoteza.
(ii) Pentru orice $x, y \in H$, avem:

$$< x, (T^\star)^\star y > = < T^\star x, y > = \overline{< y, T^\star x >} = \overline{< Ty, x >} = < x, Ty >,$$

şi deci $(T^\star)^\star = T$.
(iii) Din inegalitatea $\| T^\star \| \leq \| T \|$ (care a fost deja demonstrată), şi din **(ii)** rezultă imediat $\| T^\star \| = \| T \|$.
(iv) Din **(iii)**, rezultă inegalitatea $\| T^\star T \| \leq \| T^\star \| \| T \| = \| T \|^2$. Pentru a demonstra cealaltă inegalitate, fie $x \in H$; avem:

$$\| Tx \|^2 = < Tx, Tx > = < T^\star Tx, x > \leq \| T^\star Tx \| \| x \| \leq \| T^\star T \| \| x \|^2,$$

şi deci $\| T \|^2 \leq \| T^\star T \|$.

2.Propoziţie
Dacă $T, S \in \mathcal{L}(H)$, atunci:
(i) $(\alpha T + \beta S)^\star = \overline{\alpha} T^\star + \overline{\beta} S^\star , \forall \alpha\, \beta \in C.$
(ii) $(TS)^\star = S^\star T^\star$.

(iii) Dacă T este inversabil, atunci $T^\star$ este inversabil şi

$$(T^{-1})^\star = (T^\star)^{-1}.$$

(iv) Aplicaţia $\star : \mathcal{L}(H) \to \mathcal{L}(H)\,,\, T \to T^\star$ este o involuţie pe algebra $\mathcal{L}(H)$ (definiţia 29,cap.4); mai mult, din propoziţia anterioară **(iv)**, rezultă că $\mathcal{L}(H)$ este o $C^\star$-algebră (necomutativă).
Demonstraţie Relaţia **(i)** o propunem ca exerciţiu.
(ii) Pentru orice $x, y \in H$, avem:

$$< TSx, y >=< Sx, T^\star y >=< x, S^\star T^\star y >,$$

şi deci $(TS)^\star = S^\star T^\star$.
(iii) Dacă T este operator inversabil, atunci, folosind relaţia **(ii)** pentru operatorii $T^\star$ şi T^{-1}, obţinem:

$$T^\star(T^{-1})^\star = (T^{-1}T)^\star = I^\star = I = (TT^{-1})^\star = (T^{-1})^\star T^\star,$$

ceea ce încheie demonstraţia. Afirmaţia **(iv)** este o consecinţă imediată a celor demonstrate anterior.

3.Observaţie
Desigur, unele din proprietăţile demonstrate în propoziţiile anterioare sunt cazuri particulare ale rezultatelor corespunzătoare referitoare la $C^\star$-algebre. Conform definiţiei 29,cap.4, un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte **autoadjunct** dacă $T = T^\star$, **normal** dacă $TT^\star = T^\star T$ şi **unitar** dacă $TT^\star = T^\star T = I$.
Reamintim (definiţia 7 şi exemplul 8(iv),cap.4), că **spectrul** unui operator $T \in \mathcal{L}(H)$ este, prin definiţie,

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C\,;\, \lambda I - T \,\text{nu este inversabil}\}.$$

Din teorema 10,cap.4 ştim că $\sigma(T)$ este mulţime nevidă şi compactă. Din teorema lui Banach (corolarul 41,cap.3), rezultă că

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C\,;\, \lambda I - T \,\text{nu este bijectiv}\}.$$

În cazul în care spaţiul Hilbert H este finit dimensional, $H = C^n$, am văzut în capitolul 2 că

$$\sigma(T) = \{\lambda \in C\,;\, \exists x \neq 0 \,\text{astfel încât}\, Tx = \lambda x\}.$$

Mulţimea $\sigma(T)$ este în acest caz finită şi elementele ei se numesc **valori proprii**, iar vectorii $x \neq 0$ care verifică relaţia $Tx = \lambda x$ se numesc

vectori proprii asociaţi lui λ. În general, pe un spaţiu Hilbert infinit dimensional, mulţimea valorilor proprii (numită şi **spectrul punctual** şi notată $\sigma_p(T)$) este o submulţime strictă a spectrului, deoarece în acest caz există operatori care sunt injectivi dar nu sunt surjectivi. Aşa cum vom vedea în exemplele din paragraful următor, există operatori ale căror spectre punctuale sunt vide (dar, evident, spectrele lor sunt nevide). O altă submulţime remarcabilă a spectrului unui operator este **spectrul punctual aproximativ**, notat $\sigma_{pa}(T)$ şi definit prin:

$$\sigma_{pa}(T) = \{\lambda \in C\,;\, \exists x_n \in H \text{astfel încât} \parallel x_n \parallel = 1 \text{şi} \lim_{n\to\infty} (\lambda I - T)x_n = 0\}.$$

Este evident că $\sigma_p(T) \subseteq \sigma_{pa}(T)$, deoarece dacă λ este o valoare proprie, atunci putem lua şirul constant $x_n = x$, unde vectorul x este un vector propriu de normă 1 asociat valorii proprii λ. Incluziunea $\sigma_{pa}(T) \subseteq$
$\subseteq \sigma(T)$ se demonstrează prin reducere la absurd : dacă $\lambda \in \sigma_{pa}(T)$ dar $\lambda \notin \sigma(T)$, atunci există operatorul $(\lambda I - T)^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ şi aplicându-l relaţiei

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda I - T)x_n = 0,$$

obţinem $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, contradicţie cu $\parallel x_n \parallel = 1$, $\forall n \in N$. Se poate demonstra următorul rezultat ([10],p.40): spectrul unui operator normal este egal cu spectrul punctual aproximativ.

Exemple ilustrative pentru noţiunile introduse aici vor fi date în paragraful următor.

Conform celor demonstrate în propoziţia 35,cap.4, operatorii autoadjuncţi au spectrul real, iar cei unitari au spectrul inclus în cercul unitate. Am demonstrat de asemenea (obsevaţia 8,cap.4) că dacă T este un operator inversabil, atunci

$$\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1}\,;\, \lambda \in \sigma(T)\}.$$

4.Definiţie

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Un subspaţiu $K \subseteq H$ se numeşte **subspaţiu invariant** pentru T dacă $T(K) \subseteq K$; subspaţiul K se numeşte **subspaţiu reducător** pentru T dacă $T(K) \subseteq K$ şi $T(K^\perp) \subseteq K^\perp$.

5.Propoziţie

Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ şi K un subspaţiu în H; următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(a) K este subspaţiu invariant pentru T.

(b) $K^\perp$ este subspaţiu invariant pentru $T^\star$.

Demonstraţia o repetă pe cea din cazul $H = C^n$, (lema 27,cap2).

Evident, de aici rezultă că pentru un operator autoadjunct un subspaţiu invariant este şi subspaţiu reducător.
Reamintim că am notat cu $\mathrm{Ker}(T)$ şi $\mathrm{Im}(T)$ **nucleul** şi respectiv **imaginea** operatorului T. Este evident că subspaţiile $\mathrm{Ker}(T)$ şi $\mathrm{Im}(T)$ sunt invariante pentru T. In continuare demonstrăm o relaţie între nucleul unui operator şi imaginea adjunctului său.

6.Propoziţie
Pentru orice operator $T \in \mathcal{L}(H)$, avem:
(i) $\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^\star))^\perp$.
(ii) $\mathrm{Ker}(T^\star) = (\mathrm{Im}(T))^\perp$.
Demonstraţie (i) Fie $x \in \mathrm{Ker}(T)$ şi fie $y \in H$; atunci $< T^\star y, x >=< y, Tx >= 0$ şi deci $x \perp \mathrm{Im}(T^\star)$. Pentru a demonstra incluziunea inversă fie $x \in (\mathrm{Im}(T^\star))^\perp$; atunci, pentru orice $y \in H$, avem $< Tx, y >=< x, T^\star y >= 0$ şi deci $Tx = 0$, adică $x \in \mathrm{Ker}(T)$. Egalitatea **(ii)** este o consecinţă a egalităţilor **(i)** şi $(T^\star)^\star = T$.

7.Consecinţă
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Dacă T şi $T^\star$ sunt mărginiţi inferior, atunci T este operator inversabil.
Demonstraţie Reamintim că T se numeşte mărginit inferior (a se vedea definiţia 13,cap.3) dacă există $m > 0$ astfel încât $\| Tx \| \geq m \| x \|$, pentru orice $x \in H$. În baza propoziţiei 14,cap.3, este suficient să demonstrăm că imaginea lui T este un subspaţiu dens în H. Deoarece $T^\star$ este mărginit inferior, el este injectiv şi deci $\mathrm{Ker}(T^\star) = 0$. Din propoziţia anterioară, rezultă că $(\mathrm{Im}(T))^\perp = 0$ şi deci (aici bara înseamnă închiderea) $\overline{(\mathrm{Im}(T))} = (\mathrm{Im}(T))^{\perp\perp} = 0^\perp = H$; pentru prima egalitate am folosit relaţia $\overline{K} = K^{\perp\perp}$, care este adevărată pentru orice subspaţiu $K \subseteq H$ (a se vedea şi definiţia 7,cap.1).

8.Definiţie
Un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte **pozitiv** dacă $< Tx, x > \geq 0\,,\ \forall x \in \in H$. Să mai observăm că dacă $T \in \mathcal{L}(H)$ este un operator arbitrar, atunci operatorul $T^\star T$ este pozitiv:

$$< T^\star Tx, x >=< Tx, Tx >=\| Tx \|^2 \geq 0\,,\ \forall x \in H.$$

9.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$.

(i) Dacă $< Tx, x >= 0$, $\forall x \in H$, atunci $T = O$.
(ii) T este autoadjunct dacă şi numai dacă $< Tx, x > \in R$, $\forall x \in H$.
(iii) Dacă T este pozitiv, atunci $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.
(iv) Dacă T este unitar, atunci $\sigma(T) \subseteq \{\lambda\,;\, |\lambda| = 1\}$.
(v) Dacă T este inversabil atunci $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1}\,;\, \lambda \in \sigma(T)\}$.
Demonstraţie (i) Pentru orice $x, y \in H$, din identitatea

$$< T(x + y), x + y >= 0,$$

rezultă :
(a) $< Tx, y > + < Ty, x >= 0$.
Înlocuind pe y cu iy în ultima egalitate şi înmulţind apoi cu i , obţinem:
(b) $< Tx, y > - < Ty, x >= 0$.
Adunând relaţiile **(a)** şi **(b)** obţinem $< Tx, y >= 0$, ceea ce încheie demonstraţia.
(ii) Dacă T este autoadjunct, atunci pentru orice $x \in H$, avem:

$$< Tx, x >=< x, T^\star x >=< x, Tx >= \overline{< Tx, x >},$$

şi deci $< Tx, x > \in R$. Reciproc, dacă $< Tx, x > \in R$, $\forall x \in H$, atunci, calculând $< Tx, y >$ cu relaţia de polarizare (observaţia 6(a),cap.1), obţinem $< Tx, y >= \overline{< Ty, x >}$ şi deci $T = T^\star$. În particular, de aici rezultă că orice operator pozitiv este autoadjunct.
(iii) Dacă T este pozitiv, atunci $\sigma(T) \subset R$. Fie $\lambda < 0$ şi $x \in H$; avem:

$$\| (\lambda I - T)x \|^2 =< (\lambda I - T)x, (\lambda I - T)x >=$$

$$= \lambda^2 \| x \|^2 - 2\lambda < Tx, x > + \| Tx \|^2 \geq \lambda^2 \| x \|^2,$$

ceea ce arată că operatorii $\lambda I - T$ şi $(\lambda I - T)^\star$ sunt mărginiţi în jos (ei sunt egali). Din consecinţa 7, rezultă acum că $\lambda I - T$ este inversabil şi deci $\lambda \notin \sigma(T)$, ceea ce încheie demonstraţia.
(iv) şi **(v)** au fost demonstrate în capitolul 4, observaţia 8 şi propoziţia 35. Propunem cititorului să găsească şi demonstraţii directe (pentru operatori) acestor afirmaţii.

5.2 Proiectori

O clasă importantă de operatori pozitivi, este, ca şi în cazul finit dimensional, clasa proiectorilor.

10.Definiţie
Un operator $P \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte **proiector** (sau **proiecţie**) dacă $P^2 = P = P^\star$. Proiectorii sunt operatori pozitivi:

$$< Px, x >=< P^2x, x >=< Px, Px >\geq 0.$$

În cele ce urmează vom folosi în mod esenţial descompunerea ortogonală a lui H după un subspaţiu închis (teorema 11,cap1). Fie K un subspaţiu închis în H şi fie $P_K : H \to H$, $P_Kx = y$, unde, $x = y + z$ cu $y \in K$ şi $z \in K^\perp$. În teorema următoare vom demonstra că P_K este proiecţie şi că orice proiecţie se poate construi în acest fel.

11.Teoremă
(i) Fie $K \subseteq H$ un subspaţiu închis; atunci operatorul P_K definit mai sus este un proiector.
(ii) Reciproc, dacă P este un proiector, atunci există un subspaţiu închis $K \subseteq H$ (şi anume $K = \mathrm{Im}(P)$) astfel încât $P = P_K$.
Demonstraţie (i) Fie $x_\iota = y_\iota + z_\iota$, $\iota \in \{1, 2\}$ doi vectori din H cu descompunerile ortogonale corespunzătoare ($y_\iota \in K$, $z_\iota \in K^\perp$). Dacă $\lambda_\iota \in C$, $\iota \in 1, 2$, atunci descompunerea ortogonală (unică) a vectorului $\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2$ este:

$$\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 = (\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) + (\lambda_1z_1 + \lambda_2z_2),$$

şi deci:

$$P_K(\lambda_1x_1 + \lambda_2x_2) = (\lambda_1y_1 + \lambda_2y_2) = \lambda_1P_Kx_1 + \lambda_2P_Kx_2,$$

ceea ce arată liniaritatea lui P_K. Continuitatea rezultă din:

$$\| P_Kx_1 \|^2=\| y_1 \|^2\leq\| y_1 \|^2 + \| z_1 \|^2=\| x_1 \|^2 .$$

Din relaţia de mai sus rezultă şi inegalitatea $\| P_K \|\leq 1$. Operatorul P_K este autoadjunct:

$$< P_Kx_1, x_2 >=< y_1, y_2 + z_2 >=< y_1, y_2 >=< y_1 + z_1, y_2 >=< x_1, P_Kx_2 > .$$

Dacă $y \in K$, atunci descompunerea sa ortogonală este $y = y + 0$, şi deci $P_Ky = y$. De aici rezultă că pentru orice $x \in H$, $x = y + z$,
($y \in K$, $z \in K^\perp$), avem: $P^2x = Py = y = Px$, ceea ce arată că P_K este o proiecţie având imaginea K.
(ii) Fie acum o proiecţie $P \in \mathcal{L}(H)$ şi fie $K = \mathrm{Im}(P)$. Evident, K este subspaţiu în H; demonstrăm că este închis. Pentru aceasta, fie $(y_n)_n \subset K$

un şir de vectori din K, convergent la $y \in H$. Din definiţia lui K rezultă că există un şir $(x_n)_n \subset H$ astfel încât $y_n = Px_n$; avem:

$$y = \lim_{n\to\infty} Px_n = \lim_{n\to\infty} P^2 x_n = P(\lim_{n\to\infty} Px_n) = Py,$$

ceea ce arată că $y \in K$ şi deci K este submulţime închisă în H; în plus, $Py = y$, $\forall y \in K$. Fie acum $z \in K^{\perp}$. Deoarece $P^2 z \in K$, rezultă:

$$\| Pz \|^2 = < Pz, Pz > = < z, P^2 z > = 0,$$

şi deci $Pz = 0$. Fie acum $x \in H$, $x = y + z$ cu $y \in K$ şi $z \in K^{\perp}$. Avem: $Px = P(y+z) = Py = y = P_K x$, ceea ce încheie demonstraţia.

12.Observaţie

Fie $P \in \mathcal{L}(H)$ o proiecţie şi fie $K = \mathrm{Im}(P)$ subspaţiul pe care ea proiectează. Atunci operatorul $I - P$ este de asemenea proiecţie şi $I - P = P_{K^{\perp}}$, sau , echivalent, $\mathrm{Im}(I-P) = K^{\perp}$. Evident, proiecţiile P şi $I - P$ satisfac relaţiile $P + (I - P) = I$ şi $P(I-P) = (I-P)P = O$. În general, suma şi diferenţa a două proiecţii P şi Q nu sunt proiecţii; propunem cititorului să demonstreze următoarele echivalenţe:

(i) $P + Q$ este proiecţie $\Longleftrightarrow PQ = QP = O$; în acest caz subspaţiul pe care proiectează $P + Q$ este suma (directă) a subspaţiilor $\mathrm{Im}(P)$ şi $\mathrm{Im}(Q)$.

(ii) $P - Q$ este proiecţie $\Longleftrightarrow PQ = QP = Q$; în acest caz, $\mathrm{Im}(P-Q)$ este suma (directă) a subspaţiilor $\mathrm{Ker}(P)$ şi $\mathrm{Im}(Q)$.

13.Definiţie

Pe mulţimea operatorilor autoadjuncţi se poate defini o relaţie de ordine (parţială) prin $T \leq S \Longleftrightarrow S - T$ este operator pozitiv, adică $< (S - T)x, x > \geq 0$, $\forall x \in H$. Demonstraţia este imediată. Restricţia acestei relaţii de ordine la mulţimea proiectorilor coincide cu relaţia de incluziune între subspaţiile imagine ale proiecţiilor, rezultatul fiind conţinut în următoarea teoremă. Cel mai mic proiector este operatorul identic nul, O, iar cel mai mare proiector este identitatea, I; evident, $\| O \| = 0$ şi $\| I \| = 1$. Dacă $P \in \mathcal{L}(H)$ este un proiector diferit de O şi I, atunci $\| P \| = 1$; inegalitatea $\| P \| \leq 1$ a fost deja arătată în demonstraţia teoremei 11. Pentru cealaltă inegalitate, fie $x_o \in \mathrm{Im}(P)$ astfel încât $\| x_o \| = 1$; atunci:

$$\| P \| = \sup_{\|x\|=1} \| Px \| \geq \| Px_o \| = \| x_o \| = 1.$$

14.Teoremă

Fie $P, Q \in \mathcal{L}(H)$ două proiecţii pe subspaţiile $\mathcal{X} = \mathrm{Im}(P)$ şi respectiv $\mathcal{Y} =$

$\mathrm{Im}(Q)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$.
(b) $QP = P$.
(c) $PQ = P$.
(d) $\| Px \| \leq \| Qx \|$.
(e) $P \leq Q$.
Demonstraţie (a)$\Longrightarrow$(b) Dacă $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$, atunci pentru orice $x \in H$ avem $Px \in \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}$ şi deci $QPx = Px$.
(b)$\Longrightarrow$(c) Din $QP = P$, rezultă $PQ = P^\star Q^\star = (QP)^\star = P^\star = P$.
(c)$\Longrightarrow$(d) Din $PQ = P$ şi din inegalitatea $\| P \| \leq 1$ (arătată în demonstraţia teoremei 11), rezultă:

$$\| Px \| = \| PQx \| \leq \| Qx \| , \forall x \in H$$

.
(d)$\Longrightarrow$(e) Fie $x \in H$; folosind **(d)**, avem:

$$< Px, x > = < P^2 x, x > = < Px, Px > = \| Px \|^2 \leq \| Qx \|^2 = < Qx, x > .$$

(e)$\Longrightarrow$(a) Fie $x \in \mathcal{X}$; din **(e)**, rezultă:

$$\| x \|^2 = < Px, x > \leq < Qx, x > = \| Qx \|^2 \leq \| x \|^2,$$

ceea ce arată că $\| Qx \| = \| x \| , \forall x \in \mathcal{X}$. Demonstraţia se încheie observând că din definiţia proiectorilor rezultă egalitatea:

$$\mathcal{Y} = \{ y \in H \, ; \, \| Qy \| = \| y \| \}.$$

În următoarea propoziţie dăm legătura dintre subspaţiile invariante ale unui operator şi proiectorii asociaţi acestor subsppaţii.

15.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ şi fie $P \in \mathcal{L}(H)$ un proiector; atunci:
(a) $\mathrm{Ker}(P)$ este invariant la $T \Longleftrightarrow PT = PTP$.
(b) $\mathrm{Im}(P)$ este invariant la $T \Longleftrightarrow TP = PTP$.
Înainte de a face demonstraţia, să observăm că deoarece $\mathrm{Ker}(P)^\perp = \mathrm{Im}(P)$, (conform propoziţiei 6, P fiind operator autoadjunct), din afirmaţiile de mai sus rezultă:

$\mathrm{Ker}(P)$ şi $\mathrm{Im}(P)$ sunt subspaţii reducătoare pentru operatorul T dacă şi numai dacă $PT = TP$.
Demonstraţie Vom demonstra numai **(a)**, demonstraţia pentru **(b)** fiind

asemănătoare; presupunem că Ker(P) este subspaţiu invariant pentru T. Fie $x \in H$ şi fie $y \in$Ker(P) şi $z \in$Im(P) =Ker$(P)^{\perp}$ astfel încât $x = y + z$; atunci $Px = z$ şi $PTy = 0$ şi deci avem:

$$PTx = PT(y + z) = PTy + PTz = PTz = PTPx.$$

Reciproc, dacă $x \in$Ker(P), atunci din ipoteză $PTx = PTPx = 0$, ceea ce încheie demonstraţia.

Încheiem acest paragraf cu o analogie între algebra operatorilor liniari şi continui pe un spaţiu Hilbert, $\mathcal{L}(H)$ şi corpul numerelor complexe, C.

$$\text{corpul (comutativ) } C \longleftrightarrow \text{algebra (necomutativă) } \mathcal{L}(H).$$

$$\text{număr complex } z \in C \longleftrightarrow \text{operator } T \in \mathcal{L}(H).$$

$$\text{conjugatul } \overline{z} \longleftrightarrow \text{adjunctul } T^{\star}.$$

$$\text{număr real } a = \overline{a} \longleftrightarrow \text{operator autoadjunct } A = A^{\star}.$$

$$\text{număr pozitiv } \longleftrightarrow \text{operator pozitiv.}$$

$$\text{număr de modul 1 } \; z\overline{z} = 1 \longleftrightarrow \text{operator unitar } UU^{\star} = U^{\star}U = I.$$

$$\text{soluţiile ecuaţiei } z^2 = z \text{ (adică 0 şi 1)} \longleftrightarrow \text{ proiector } : P^2 = P = P^{\star}.$$

5.3 Exemple de operatori pe spaţii Hilbert

Acest paragraf este rezervat studiului unor exemple importante de operatori, dintre care amintim operatorul diagonal, operatorii de translaţie, operatorii de multiplicare, operatorul integral şi de convoluţie.

16.Definiţie (Operatorul diagonal)
Fie $\ell^2(Z)$ spaţiul Hilbert al şirurilor (bilaterale) de pătrat sumabil (cf. exemplului 17(ii),cap.1) şi $(\ell^{\infty}(Z)\,,\,\|\;\|_{\infty})\,,$ $C^{\star}$-algebra comutativă a şirurilor mărginite (cf.exemplului 2(iii),cap.4). Pentru orice şir $\alpha \in \ell^{\infty}(Z)$, şi pentru orice $x \in \ell^2(Z)$, notăm cu αx şirul produs: $(\alpha x)(n) = \alpha(n)x(n)\,, \forall n \in Z$. Inegalitatea:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(\alpha x)(n)|^2 \leq \| \alpha \|_{\infty}^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty,$$

arată că $\alpha x \in \ell^2(Z)$. Putem deci defini operatorul:

$$D_{\alpha} : \ell^2(Z) \longrightarrow \ell^2(Z)\,,\; D_{\alpha}x = \alpha x.$$

Vom numi D_α **operatorul diagonal** definit de α. Evident, se poate da o definiţie corespunzătoare şi pe spaţiul $\ell^2(N)$ (în acest caz $\alpha \in \ell^\infty(N)$).

17.Observaţie
Denumirea de operator diagonal este justificată de următoarea analogie cu cazul finit dimensional. Fie $(\sigma_n)_{n\in Z}$ baza canonică din $\ell^2(Z)$, adică $\sigma_n(k) = 1$ dacă $n = k$ şi 0 în rest. Fie $M = (a_{ij})_{i,j\in Z}$ "matricea infinită" a lui D_α în această bază, adică $a_{ij} =< D_\alpha\sigma_j, \sigma_i >$. Atunci $a_{ij} = \alpha(i)$, dacă $i = j$ şi $a_{ij} = 0$, dacă $i \neq j$.
Reamitim că involuţia pe algebra $\ell^\infty(Z)$ este $\alpha \longrightarrow \overline{\alpha}$, (aici bara înseamnă conjugarea complexă), iar spectrul în această algebră este $\sigma(\alpha) = \overline{\{\alpha(n)\,;\, n \in Z\}}$, (aici bara înseamnă închiderea mulţimii, deci în cazul nostru este formată din termenii şirului α la care se adaugă punctele limită ale şirului), conform exemplului 9(v),cap.4.
Proprietăţile operatorului diagonal sunt cuprinse în următoarea teoremă.

18.Teoremă (proprietăţile operatorului diagonal)
(a) Pentru orice $\alpha\,,\,\beta \in \ell^\infty(Z)$ şi $a\,,\,b \in C$, avem:

$$aD_\alpha + bD_\beta = D_{a\alpha+b\beta} \text{ şi } D_\alpha D_\beta = D_{\alpha\,\beta}.$$

(b) Operatorul D_α este liniar şi continuu.
(c) $\| D_\alpha \|=\| \alpha \|_\infty$.
(d) $(D_\alpha)^\star = D_{\overline{\alpha}}$. De aici rezultă că operatorul diagonal este normal şi în plus avem următoarele caracterizări:

$$D_\alpha \text{ este autoadjunct} \Longleftrightarrow \alpha(n) \in R\,,\, \forall n \in Z;$$

$$D_\alpha \text{ este pozitiv} \Longleftrightarrow \alpha(n) \geq 0\,,\, \forall n \in Z.$$

$$D_\alpha \text{ este unitar} \Longleftrightarrow |\alpha(n)| = 1\,,\, \forall n \in Z.$$

$$D_\alpha \text{ este proiector} \Longleftrightarrow \alpha(n) = 0 \text{ sau } 1,\ \forall n \in Z \text{ (sau } \alpha^2 = \alpha).$$

(e) Operatorul D_α este inversabil (în algebra $\mathcal{L}(\ell^2(Z))$ dacă şi numai dacă şirul α este inversabil (în algebra $\ell^\infty(Z)$). În consecinţă, avem:

$$\sigma(D_\alpha) = \overline{\{\alpha(n)\,;\, n \in Z\}} = \sigma(\alpha).$$

În plus, spectrul punctual (mulţimea valorilor proprii) al operatorului diagonal este $\sigma_p(D_\alpha) = \{\alpha(n)\,;\, n \in Z\}$.
Înainte de a face demonstraţia, să comparăm cu cazul finit dimensional: acolo valorile proprii erau numerele de pe diagonala principală a matricei operatorului în baza canonică (în cazul infinit dimensional, termenii şirului α); în

plus, acum apar în spectru punctele limită ale "diagonalei" (şi care, în general, nu sunt valori proprii), dar care sunt în spectrul punctual aproximativ întrucât D_α este operator normal , (a se vedea observaţia 3).
Demonstraţie Afirmaţiile de la punctul **(a)** sunt evidente.
(b) şi **(c)** Liniaritatea este imediată. Din inegalitatea

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |(\alpha x)(n)|^2 \leq \| \alpha \|_\infty^2 \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty,$$

rezultă că $\| D_\alpha x \|_2 \leq \| \alpha \|_\infty \| x \|_2$ şi deci (folosind propoziţia 3, cap.3), obţinem continuitatea lui D_α şi inegalitatea $\| D_\alpha \| \leq \| \alpha \|_\infty$. Pentru a demonstra inegalitatea inversă, să observăm mai întâi că dacă $(\sigma_n)_{n\in Z}$ este baza canonică din $\ell^2(Z)$, atunci $D_\alpha \sigma_n = \alpha(n)\sigma_n$; rezultă:

$$|\alpha(n)| = \| \alpha(n)\sigma_n \|_2 = \| D_\alpha \sigma_n \|_2 \leq \| D_\alpha \| \| \sigma_n \|_2 = \| D_\alpha \| .$$

Luând supremum după $n \in Z$ în inegalitatea de mai sus, demonstraţia se încheie.
(d) Pentru orice şiruri x şi y din $\ell^2(Z)$, avem:

$$< D_\alpha x, y >= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(n)x(n)\overline{y(n)} =< x, \overline{\alpha} y >=< x, D_{\overline{\alpha}} y >,$$

ceea ce arată că $(D_\alpha)^\star = D_{\overline{\alpha}}$. Celelalte afirmaţii sunt imediate.
(e) Să presupunem mai întâi că şirul α este inversabil: există deci $\beta \in \ell^\infty(Z)$ astfel încât $\alpha(n)\,\beta(n) = 1\,, \forall n \in Z$. Atunci operatorul D_β este liniar şi continuu şi $D_\alpha D_\beta = D_\beta D_\alpha = I$; deci $D_\beta = (D_\alpha)^{-1}$. Reciproc, dacă operatorul D_α este inversabil, atunci $(D_\alpha)^{-1}(\alpha(n)\sigma_n) =$
$= \sigma_n$, şi deci:

$$(D_\alpha)^{-1}\sigma_n = \frac{1}{\alpha(n)}\sigma_n.$$

De aici, trecând la norme, obţinem:

$$\| \frac{1}{\alpha(n)}\sigma_n \|_2 = \| (D_\alpha)^{-1}\sigma_n \|_2 \leq \| (D_\alpha)^{-1} \| \| \sigma_n \|_2 = \| (D_\alpha)^{-1} \| < \infty,$$

ceea ce implică $|\frac{1}{\alpha(n)}| \leq \| (D_\alpha)^{-1} \|\,, \forall n \in Z$; în concluzie şirul $\frac{1}{\alpha}$ este mărginit şi deci α este inversabil.
Notând cu $\mathbf{1} \in \ell^\infty(Z)$ şirul constant 1, avem $\lambda I - D_\alpha = D_{\lambda \mathbf{1} - \alpha}\,, \forall \lambda \in C$. Rezultă deci că operatorul $\lambda I - D_\alpha$ este inversabil dacă şi numai dacă şirul $\lambda\,\mathbf{1} - \alpha$ este inversabil, deci $\sigma(D_\alpha) = \sigma(\alpha)$; acesta din urmă a fost însă calculat în exemplul 9(v),cap.4 şi este $\overline{\{\alpha(n)\,;\, n \in Z\}}$.

Demonstrăm acum egalitatea $\sigma_p(D_\alpha) = \{\alpha(n)\,;\, n \in Z\}$. Pentru orice n fixat în Z, fie $x_n \in \ell^2(Z)$ definit prin $x_n(k) = \alpha(n)$ pentru $k =$ $= n$ şi 0 pentru $k \neq n$. Atunci $((\alpha(n)I - D_\alpha)x_n)(k) = 0\,, \forall k \in Z$ şi deci numărul $\alpha(n)$ este valoare proprie a operatorului D_α, iar x_n este un vector propriu asociat acestei valori proprii. Pentru a demonstra incluziunea reciprocă, fie $\lambda \in \sigma_p(D_\alpha)$ şi fie $x \in \ell^2(Z)$ astfel încât x nu este şirul identic nul şi $((\lambda I - D_\alpha)x)(n) = 0\,, \forall n \in Z$. Presupunând prin absurd că $\lambda \neq \alpha(n)\,, \forall n \in Z$, din egalitatea

$$(\lambda - \alpha(n))x(n) = 0\,, \forall n \in Z,$$

obţinem $x(n) = 0\,, \forall n \in Z$, contradicţie.

19.Obsevaţie

În cursul demonstraţiei teoremei anterioare, am arătat că aplicaţia $\ell^\infty(Z) \ni \alpha \longrightarrow D_\alpha \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ este un morfism injectiv (chiar izometric) de $C^\star$-algebre, având drept imagine subalgebra operatorilor diagonali. Rezultă că subalgebra operatorilor diagonali este o $C^\star$- subalgebră comutativă în $\mathcal{L}(\ell^2(Z))$, (în particular, este deci completă) fiind izomorfă cu $C^\star$-algebra comutativă $\ell^\infty(Z)$. O consecinţă a acestui fapt este că limita unui şir convergent de operatori diagonali este tot un operator diagonal.
Bineînţeles, operatorii diagonali pe spaţiul Hilbert $\ell^2(N)$ au proprietăţi similare. De exemplu, dacă $\alpha(n) = \frac{1}{n+1}\,, \forall n \in N$, atunci operatorul diagonal asociat $D_\alpha \in \mathcal{L}(\ell^2(N))$ este autoadjunct, $\| D_\alpha \| = 1$ şi $\sigma(D_\alpha) = \{\frac{1}{n+1}\,;\, n \in N\} \bigcup \{0\}$; evident, operatorul D_α nu este inversabil în acest caz.

20.Definţie (operatorul de translaţie unilateral)

Pe spaţiul Hilbert $\ell^2(N)$ considerăm operatorul:

$$V : \ell^2(N) \longrightarrow \ell^2(N)\,, \ (Vx)(0) = 0 \text{ şi } (Vx)(n) = x(n-1)\,, \forall n \geq 1.$$

Este evident că definiţia este corectă ($Vx \in \ell^2(N)$). Operatorul V se numeşte **operatorul de translaţie unilateral**, (unilateral shift); în teoria sistemelor V este denumit **întârziere ideală** (ideal delay).
Înainte de a enunţa şi demonstra proprietăţile operatorului V , vom face o observaţie cu caracter general în legătură cu spectrul unui operator.

21.Observaţie

Fie H un spaţiu Hilbert şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Dacă $\lambda \in \sigma_p(T^\star)$, atunci , prin definiţie, există $x \in H$, $x \neq 0$ astfel încât $T^\star x = \lambda x$; avem deci:

$$\{0\} \neq \mathrm{Ker}(\lambda I - T^\star) = (\mathrm{Im}((\lambda I - T^\star)^\star))^\perp = (\mathrm{Im}(\overline{\lambda} I - T))^\perp,$$

ceea ce arată că $\mathrm{Im}(\overline{\lambda}I - T) \neq H$, deci operatorul $\overline{\lambda}I - T$ nu este surjectiv. Am demonstrat deci:

Dacă $\lambda \in C$ este valoare proprie pentru $T^\star$, atunci $\overline{\lambda} \in \sigma(T)$.

22.Teoremă (proprietăţile operatorului de translaţie unilateral)
Fie $V : \ell^2(N) \longrightarrow \ell^2(N)$ operatorul de translaţie unilateral; atunci:
(a) V este liniar şi continuu.
(b) V este o izometrie: $\| Vx \|_2 = \| x \|_2$, $\forall x \in \ell^2(N)$.
De aici rezultă, in particular, că $\| V \| = 1$.
(c) V nu este operator inversabil (nu este surjectiv).
(d) $(V^\star x)(n) = x(n+1)$, $\forall x \in \ell^2(N)$, $\forall n \in N$ şi $\| V^\star \| = 1$.
(e) $V^\star V = I$ dar $VV^\star \neq I$.
(f) Operatorul V nu are valori proprii: $\sigma_p(V) = \emptyset$.
(g) $\sigma_p(V^\star) = \{\lambda \in C\, ;\, |\lambda| < 1\}$ şi $\sigma(V) = \sigma(V^\star) = \{\lambda \in C\, ;\, |\lambda| \leq 1\}$.
Înainte de demonstraţie, să observăm că pe spaţii finit dimensionale nu există endomorfisme injective care să nu fie surjective (de fapt operatorul V este mai mult decât injectiv, este o izometrie); dimpotrivă,în cazul finit dimensional orice izometrie este operator unitar. Este de asemenea de reţinut faptul că V nu are valori proprii, în timp ce în cazul unui operator definit pe un spaţiu finit dimensional spectrul este format numai din valori proprii.
Demonstraţie Prin definiţie, V acţionează astfel:

$$\ell^2(N) \ni x = (x(0), x(1), x(2), ..) \to (0, x(0), x(1), ..) = Vx \in \ell^2(N).$$

(a),(b),(c) Liniaritatea o lăsăm ca exerciţiu. Este evident (din schema de mai sus) că $\| Vx \|_2 = \| x \|_2$, şi deci V este izometrie. Operatorul V nu este surjectiv deoarece $\mathrm{Im}(V) = \{x \in \ell^2(N)\, ;\, x(0) = 0\} \neq \ell^2(N)$ de exemplu, nu există $x \in \ell^2(N)$ astfel încât $Vx = \sigma_o$.
(d) Pentru orice $x, y \in \ell^2(N)$, avem:

$$< Vx, y >= \sum_{n=0}^{\infty} (Vx)(n)\overline{y(n)} = \sum_{n=1}^{\infty} x(n-1)\overline{y(n)} = \sum_{n=0}^{\infty} x(n)\overline{y(n+1)},$$

ceea ce arată că adjunctul lui V este:

$$\ell^2(N) \ni y = (y(0), y(1), y(2), ..) \to V^\star y = (y(1), y(2), y(3), ..) \in \ell^2(N).$$

Este evident că pentru orice $x \in \ell^2(N)$ avem $\| V^\star x \|_2 \leq \| x \|_2$,deci $\| V^\star \| \leq 1$. Dar $\| V^\star \sigma_1 \|_2 = \| \sigma_o \|_2 = 1$, deci $\| V^\star \| = 1$.
(e) Este clar că $V^\star V = I$; dar, pentru orice $x \in \ell^2(N)$ cu proprietatea că $x(0) \neq 0$, avem $VV^\star x \neq x$.

(f) Arătăm acum că V nu are valori proprii. Fie , prin absurd , $\lambda \in C$ astfel încât există $x \in \ell^2(N)$, $x \neq 0$, cu proprietatea $Vx = \lambda x$, adică:

$$(0, x(0), x(1), x(2), ...) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), ...).$$

De aici rezultă $x(n) = 0$, $\forall n \in N$, contradicţie cu $x \neq 0$.
Am demonstrat deci că $\sigma_p(V) = \emptyset$.
(g) Deoarece $\| V \| = \| V^\star \| = 1$, rezultă că spectrele operatorilor V şi $V^\star$ sunt incluse în discul unitate închis. Vom arăta mai întâi că $\sigma_p(V^\star) = \{\lambda \in C\, ;\, |\lambda| < 1\}$. Din egalitatea $V^\star x = \lambda x$, rezultă:

$$(x(1), x(2), x(3), ...) = (\lambda x(0), \lambda x(1), \lambda x(2), ...),$$

şi deci $x(n+1) = \lambda^n x(0)$, $\forall n \in N$. Dacă $x(0) = 0$, atunci $x = 0$. Rezultă deci că vectorii proprii x asociaţi valorii proprii λ sunt de forma:

$$x = (x(0), \lambda x(0), \lambda^2 x(0), \lambda^3 x(0), ...) \text{ , cu condiţia } x(0) \neq 0.$$

Există însă restricţia $x \in \ell^2(N)$, ceea ce este echivalent cu $|\lambda| < 1$. Am demonstrat deci că:

$$\sigma_p(V^\star) = \{\lambda \in C\, ;\, |\lambda| < 1\}.$$

Din observaţia 21 de mai sus, rezultă că $\sigma(V) \supseteq \sigma_p(V^\star)$. În concluzie, spectrele operatorilor V şi $V^\star$ conţin discul unitate deschis şi sunt conţinute în discul unitate închis. Cum spectrul este mulţime închisă, rezultă că spectrele celor doi operatori sunt egale cu discul unitate închis.

23.Definiţie (operatorul de translaţie bilateral)
Pe spaţiul Hilbert $\ell^2(Z)$ considerăm aplicaţia:

$$W : \ell^2(Z) \to \ell^2(Z) \text{ , } (Wx)(n) = x(n-1) \text{ , } \forall n \in Z.$$

Este clar că $Wx \in \ell^2(Z)$, $\forall x \in \ell^2(Z)$. Operatorul W se numeşte **operatorul de translaţie bilateral**. Aşa cum vom vedea în teorema următoare, proprietăţile sale sunt în mod esenţial diferite de cele ale operatorului de translaţie unilateral.

24.Teoremă (proprietăţile operatorului de translaţie bilateral)
(a) W este liniar şi continuu.
(b) Adjunctul lui W este $(W^\star x)(n) = x(n+1)$, $\forall n \in Z$.
(c) W este operator unitar: $WW^\star = W^\star W = I$.
În particular, $\| W \| = \| W^\star \| = 1$.

(d) Operatorii W şi $W^\star$ nu au valori proprii;
(e) $\sigma(W) = \sigma_{pa}(W) = \sigma(W^\star) = \sigma_{pa}(W^\star) = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| = 1\}$.
Reamintim că σ_{pa} este spectrul punctual aproximativ (a se vedea observaţia 3 şi teorema 18 din acest capitol).
Demonstraţie (a) Liniaritatea este imediată; continuitatea rezultă din relaţia evidentă: $\| Wx \|_2 = \| x \|_2$.
(b) Pentru orice x, $y \in \ell^2(Z)$, avem:

$$< Wx, y >= \sum_{n\in Z} x(n-1)\overline{y(n)} = \sum_{n\in Z} x(n)\overline{y(n+1)},$$

şi deci într-adevăr $(W^\star x)(n) = x(n+1)$, $\forall n \in Z$.
(c) Egalităţile $WW^\star = W^\star W = I$ sunt evidente.
(d) Vom demonstra că W nu are valori proprii (analog se arată şi pentru $W^\star$). Presupunem prin absurd că există $\lambda \in C$ şi $x \in \ell^2(Z)$, $x \neq 0$ astfel încât $Wx = \lambda x$, adică $x(n-1) = = \lambda x(n)$, $\forall n \in Z$. Rezultă deci că $x(n) = \lambda^{-n} x(0)$, $\forall n \in Z$.
Dar $x \in \ell^2(Z)$ şi deci seriile geometrice:

$$\sum_{n=-\infty}^{0} |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n} \text{ şi } \sum_{n=0}^{\infty} |x(0)|^2 |\lambda|^{-2n}$$

trebuie să fie simultan convergente; acest lucru este posibil numai dacă $x(0) = 0$, adică $x = 0$, contradicţie.
(e) Faptul că spectrele operatorilor W şi $W^\star$ sunt incluse în cercul unitate rezultă din proprietatea că într-o $C^\star$-algebră spectrul oricărui element unitar este inclus în cercul unitate (propoziţia 35,cap.4).
Demonstraţia care urmează este totuşi independentă de această proprietate.
Demonstrăm că spectrul punctual aproximativ al lui W este egal cu cercul unitate. Fie $\lambda = e^{it}$ şi fie $x_n \in \ell^2(Z)$, şirul definit prin:

$$x_n(k) = (2n+1)^{-\frac{1}{2}} e^{-ikt} \text{ pentru } |k| \leq n \text{ şi } x_n(k) = 0 \text{ în rest.}$$

Propunem cititorului să arate că $\| x_n \|_2 = 1$ şi:

$$\lim_{n\to\infty} \| (\lambda I - W)x_n \|_2 = 0.$$

Analog se calculează şi $\sigma_{pa}(W^\star)$. Cum $\sigma(W)$ şi $\sigma(W^\star)$ sunt incluse în cercul unitate, demonstraţia este încheiată.

O clasă importantă de operatori este clasa operatorilor de multiplicare; un caz particular a fost deja prezentat: operatorul diagonal pe spaţiul $\ell^2(Z)$. În continuare, vom da definiţia generală a acestor

operatori.

25.Definiţie
Fie (Ω, μ) un spaţiu cu măsură (pozitivă); fie $L^2(\Omega, \mu)$ spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil definite pe Ω, (cf. exemplului 17(iii),cap.1) şi fie $L^\infty(\Omega, \mu)$, $C^\star$- algebra comutativă a funcţiilor esenţial mărginite pe Ω, (cf. exemplului 32(vi),cap.3). Pentru orice $f \in L^2(\Omega, \mu)$ şi pentru orice $\psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, definim funcţia produs $(\psi f)(t) = \psi(t) f(t)$, $\forall t \in \Omega$; avem:

$$\| \psi f \|_2 = \sqrt{\int_\Omega |\psi f|^2 d\mu} \leq \| \psi \|_\infty \| f \|_2,$$

deci $\psi f \in L^2(\Omega, \mu)$. Rezultă deci că pentru orice $\psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ putem defini aplicaţia:

$$M_\psi : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu), \; M_\psi f = \psi f.$$

Operatorul M_ψ se numeşte **operatorul de multiplicare** (sau **operatorul de înmulţire**) cu ψ; funcţia ψ se numeşte **multiplicator**. Operatorul diagonal D_α (cf. definiţiei 16) se obţine în cazul particular $\Omega = Z$, măsura μ este măsura de numărare şi $\psi = \alpha$.

26.Definiţie
Un alt caz particular remarcabil (pe care-l vom studia în continuare) este $\Omega = \mathcal{S}^1 = \{\lambda \in C\,;\, |\lambda| = 1\}$ şi măsura μ măsura Lebesgue pe cercul unitate. Notăm $L^2(\mathcal{S}^1)$ spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil pe cerc cu produsul scalar $< f, g > = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$ (cf. exemplului 17(iii),cap.1) şi cu $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ $C^\star$-algebra comutativă a funcţiilor esenţial mărginite pe cerc (cf. exemplului 2(v),cap.4). Pentru orice $\psi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ notăm cu M_ψ operatorul de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$: $(M_\psi f)(e^{it}) = \psi(e^{it}) f(e^{it})$, $\forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$.

Vom studia acum operatorii de multiplicare pe spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil definite pe cercul unitate, $L^2(\mathcal{S}^1)$.
Menţionăm totuşi că rezultatele ce urmează sunt adevărate şi în cazul (general) al operatorilor de multiplicare pe spaţiul Hilbert $L^2(\Omega, \mu)$. Demonstraţiile care vor urma se adaptează (aşa cum vom preciza) uşor cazului general.

27.Propoziţie (proprietăţile operatorului de multiplicare)
Fie $\psi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi M_ψ operatorul de multiplicare corespunzător; atunci:
(a) M_ψ este liniar şi continuu şi $\| M_\psi \| = \| \psi \|_\infty$.
(b) $M_\psi M_\phi = M_\phi M_\psi = M_{\psi\phi}$, $\forall \phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$.

(c) $(M_\psi)^\star = M_{\overline{\psi}}$ şi M_ψ este operator normal.
(d) M_ψ este operator autoadjunct dacă şi numai dacă funcţia ψ ia valori reale: $\psi = \overline{\psi}$.
(e) M_ψ este operator pozitiv dacă şi numai dacă funcţia ψ ia valori pozitive: $\psi(e^{it}) \geq 0, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$.
(f) M_ψ este operator unitar dacă şi numai dacă funcţia ψ ia valori de modul 1: $|\psi(e^{it})| = 1$, $\forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$.
(g) M_ψ este proiector dacă şi numai dacă funcţia ψ este funcţia caracteristică a unei submulţimi măsurabile de pe cerc (deci ψ ia numai valorile 0 şi 1, sau, echivalent, $\psi^2 = \psi$).
Demonstraţie (a) Liniaritatea este evidentă; calculăm norma lui M_ψ. Pentru orice $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$\| M_\psi f \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\psi(e^{it}) f(e^{it})|^2 dt} \leq \| \psi \|_\infty \| f \|_2 ,$$

şi deci am obţinut inegalitatea: $\| M_\psi \| \leq \| \psi \|_\infty$. Pentru a demonstra şi inegalitatea inversă, considerăm, pentru orice $n \in N$ mulţimea:

$$A_n = \{ e^{it} \in \mathcal{S}^1 \, ; \, |\psi(e^{it})| \geq \| \psi \|_\infty - \frac{1}{n} \}.$$

Din definiţia supremumului esenţial, rezultă că măsura mulţimii A_n este nenulă (pentru orice $n \in N$). Dacă χ_n este funcţia caracteristică a mulţimii A_n, atunci $\chi_n \in L^2(\mathcal{S}^1)$ şi:

$$\| \chi_n \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\chi_n|^2 dt} = \sqrt{\mu(A_n)},$$

unde, $\mu(A_n)$ este măsura (Lebesgue pe cerc) a mulţimii A_n. Rezultă:

$$\| M_\psi \chi_n \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\psi \, \chi_n|^2 dt} \geq$$

$$\geq \sqrt{\int_0^{2\pi} (\| \psi \|_\infty - \frac{1}{n})^2 |\chi_n|^2 dt} \geq (\| \psi \|_\infty - \frac{1}{n}) \, \| \chi_n \|_2 \, .$$

Rezultă deci că:

$$\| M_\psi \| \geq \| \psi \|_\infty - \frac{1}{n} \, , \, \forall n \in N,$$

deci $\| M_\psi \| \geq \| \psi \|_\infty$.
(b) Pentru orice ψ, $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$M_\psi M_\phi f = M_\psi(\phi f) = \psi \phi f = M_{\psi\phi} f = M_{\phi\psi} f,$$

pentru orice $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$.
(c) Dacă $f, g \in L^2(\mathcal{S}^1)$, atunci:

$$< M_\psi f, g >= \int_0^{2\pi} (\psi f)\overline{g} dt = \int_0^{2\pi} f\overline{(\overline{\psi} g)} dt =< f, M_{\overline{\psi}} g >,$$

şi deci $(M_\psi)^\star = M_{\overline{\psi}}$; operatorii de multiplicare comută toţi între ei , deci M_ψ şi $M_{\overline{\psi}}$ comută, adică M_ψ este operator normal.
Celelalte afirmaţii sunt uşor de demonstrat; de exemplu, pentru a demonstra **(f)**, să presunem mai întâi că M_ψ este unitar; atunci, din egalitatea $M_\psi M_{\overline{\psi}} = I$, rezultă $\psi\overline{\psi} = 1$. Reciproc, dacă $|\psi| = 1$, atunci, funcţia $\frac{1}{\psi} = \overline{\psi}$ este esenţial mărginită şi deci putem considera operatorul $M_{\frac{1}{\psi}}$, care este şi inversul, dar şi adjunctul lui M_ψ.

28.Observaţie
Raţionamentele de mai sus se pot reface, întocmai, şi în cazul unui spaţiu cu măsură arbitrar, (Ω, μ) cu proprietatea $\mu(\Omega) = 1$ şi, mai general, pentru un spaţiu cu măsură finită: $\mu(\Omega) < \infty$. Dacă
$\mu(\Omega) = \infty$, atunci, singura eroare în demonstraţia de mai sus ar fi aceea că mulţimea A_n ar putea avea măsură infinită: $\mu(A_n) = \infty$ şi deci inegalitatea $\| M_\psi \| \geq \| \psi \|_\infty$ nu mai este adevărată. Pentru ca demonstraţia să fie corectă şi în acest caz, este suficient să existe o submulţime în $B_n \subset A_n$, care să fie măsurabilă de măsură finită; raţionamentul s-ar putea atunci face pentru B_n în loc de A_n (şi χ_{B_n} în loc de χ_{A_n}, etc). Pentru aceasta, trebuie ca măsura μ să aibă următorea proprietate: în orice mulţime măsurabilă (de măsură infinită) să existe o submulţime măsurabilă de măsură finită (o măsură cu această proprietate se numeşte local finită). O proprietate uzuală care implică local-finitudinea măsurii μ este ca ea să fie σ-finită, adică: există un şir de mulţimi măsurabile $(D_n)_{n \in N}$ cu proprietăţile:
$\mu(D_n) < \infty, \forall n \in N$ şi $\Omega = \bigcup_{n \in N} D_n$.
De exemplu, măsura Lebesgue pe R este σ-finită, pentru că
$R = \bigcup\limits_{n \in N} (-n, n)$.

Calculul spectrului operatorului de multiplicare necesită câteva rezultate preliminare; rezultatul fundamental în această direcţie este că operatorul M_ϕ este inversabil dacă şi numai dacă funcţia ϕ este inversabilă în algebra $L^\infty(\Omega, \mu)$. Suficienţa conditiei de inversabilitate pentru M_ϕ admite o demonstraţie simplă; vom face demonstraţia pentru $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, dar ca şi mai sus, ea se poate adapta fără dificultăţi la cazul general.
Reamintim că o funcţie $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ este inversabilă dacă şi numai dacă există $m > 0$ astfel încât $|\phi(u)| \geq m$, $\forall u \in \Omega$ (a.p.t.), (exemplul 9(vi),cap.4);

am demonstrat de asemenea că $\sigma(\phi) = \text{essran}(\phi)$.

29.Propoziţie
Dacă funcţia $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ este inversabilă, atunci operatorul de multiplicare M_ϕ este inversabil.
Demonstraţie Dacă funcţia $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ este inversabilă, atunci funcţia $\frac{1}{\phi}$ este în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi deci operatorul de multiplicare cu $\frac{1}{\phi}$ este inversul căutat: $M_\phi M_{\frac{1}{\phi}} = I$.

30.Consecinţă
Dacă $\lambda \in \sigma(M_\phi)$, atunci $\lambda I - M_\phi$ nu este inversabil şi deci din propoziţia anterioară rezultă că funcţia $\lambda - \phi$ nu este inversabilă în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$; concluzie: $\sigma(M_\phi) \subseteq \sigma(\phi) = \text{essran}(\phi)$, (cf. exemplului 9.(vi),cap.4). În particular, dacă ϕ este o funcţie continuă pe $\mathcal{S}^1$ atunci $\sigma(M_\phi) \subseteq \phi(\mathcal{S}^1)$.

Pentru a demonstra reciproca propoziţiei 29 (ceea ce ar rezolva problema calculului spectrului operatorului de multiplicare), avem nevoie de două rezultate auxiliare; ca de obicei, demonstraţiile vor fi prezentate în cazul $\Omega = \mathcal{S}^1$, dar raţionamentele sunt corecte şi pentru un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită, (Ω, μ).

31.Lemă
Fie $\phi : \mathcal{S}^1 \to C$, o funcţie măsurabilă arbitrară.
Dacă $\phi f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ şi dacă operatorul

$$T : L^2(\mathcal{S}^1) \to L^2(\mathcal{S}^1)\,,\; Tf = \phi f$$

este continuu, atunci $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi $\| \phi \|_\infty \leq \| T \|$.
Demonstraţie Vom demonstra că $|\phi| \leq \| T \|$ (a.p.t.); de aici va rezulta că $\| \phi \|_\infty \leq \| T \|$ (a se vedea exemplul 4(vi).cap.1). Fie $M \subseteq \mathcal{S}^1$ o mulţime măsurabilă astfel încât $|\phi(z)| > \| T \|$, $\forall z \in M$; demonstraţia se încheie dacă demonstrăm că $\mu(M) = 0$ (aici am notat cu μ măsura Lebesgue pe cerc). Fie χ_M funcţia caracteristică a mulţimii M. Dacă prin absurd $\chi_M \neq 0$ a.p.t. , atunci:

$$\| T\chi_M \|_2 = \sqrt{\int_0^{2\pi} |\phi\chi_M|^2 dt} = \sqrt{\int_M |\phi|^2 dt} > \| T \| \, \| \chi_M \|_2\,,$$

ceea ce este o contradicţie.
În demonstraţia de mai sus am folosit ipoteza de continuitate a operatorului T; vom arăta în continuare că această ipoteză nu este necesară.

32.Lemă
Fie $\phi : \mathcal{S}^1 \to C$ o funcţie măsurabilă arbitrară.
Dacă $\phi f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, atunci $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$.
Demonstraţie Să considerăm operatorul (liniar)

$$T : L^2(\mathcal{S}^1) \to L^2(\mathcal{S}^1)\,,\, Tf = \phi f.$$

Este suficient să demonstrăm că T este continuu: din lema precedenta va rezulta apoi că ϕ este funcţie esenţial mărginită. Pentru aceasta, vom folosi teorema graficului închis (teorema 45,cap.3): dacă T este operator închis, atunci el este continuu. Pentru a demonstra că T este operator închis, fie $(f_n)_n$ un şir de funcţii din $L^2(\mathcal{S}^1)$ cu proprietăţile (a se vedea observaţia 44,cap.3):
(i) f_n converge (în $L^2(\mathcal{S}^1)$) la f.
(ii) ϕf_n converge (în $L^2(\mathcal{S}^1)$) la g.
Demonstraţia se va încheia dacă vom demonstra că g este în imaginea operatorului T , adică $g = \phi f$. Se ştie că dacă un şir de funcţii $(h_n)_n$ converge în norma $\| \|_p$ (de fapt noi vom folosi aici cazul $p = 2$), la funcţia h , atunci există un subşir al lui $(h_n)_n$ care converge punctual (a.p.t.) la h ([17],p.201). Din această cauză, putem presupune că şirul $(f_n)_n$ converge şi punctual (a.p.t.) la f . Rezultă deci că şirul $(\phi f_n)_n$ converge punctual (a.p.t.) la funcţia ϕf ; dar, deorece şirul $(\phi f_n)_n$ converge în norma $\| \|_2$ la g , rezultă, cu acelaşi raţionament ca mai sus că $(\phi f_n)_n$ converge şi punctual (a.p.t.) la g . În concluzie, $g = \phi f$.

Putem demonstra acum reciproca propoziţiei 29, şi deci avem:

33.Teoremă (spectrul operatorului de multiplicare)
Fie $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi fie M_ϕ operatorul de multiplicare asociat lui ϕ pe spaţiul $L^2(\mathcal{S}^1)$.
Atunci M_ϕ este operator inversabil dacă şi numai dacă funcţia ϕ este inversabilă (în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$); consecinţe:
(a) Spectrul operatorului M_ϕ coincide cu imaginea esenţială a funcţiei ϕ; (a se vedea exemplul 9(vi),cap.4).
(b) Raza spectrală şi norma operatorului de multiplicare sunt egale:

$$\mathrm{r}(M_\phi) = \| M_\phi \| .$$

Demonstraţie Implicaţia ϕ inversabilă $\Rightarrow$ M_ϕ inversabil a fost demonstrată în propoziţia 29.
Să presupunem acum că operatorul M_ϕ este inversabil, deci există $T \in$

$\mathcal{L}(L^2(\mathcal{S}^1))$ astfel încât $TM_\phi f = M_\phi Tf = f$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$. Rezultă deci că $\phi Tf = f$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$, adică:

$$Tf = \frac{1}{\phi} f \, , \, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Deoarece operatorul T este continuu, din lemele anterioare rezultă că funcţia $\frac{1}{\phi}$ este în $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi $\| \frac{1}{\phi} \|_\infty \leq \| T \|$. În concluzie, ϕ este inversabilă în algebra $L^\infty(\mathcal{S}^1)$, inversa ei fiind $\frac{1}{\phi} \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$.
(a) rezultă imediat aplicând rezultatul demonstrat mai sus operatorului $\lambda I - M_\phi = M_{\lambda - \phi}$.
(b) rezultă din **(a)** şi din definiţia razei spectrale:

$$\mathrm{r}(M_\phi) = \sup\{\, |\lambda| \, ; \, \lambda \in \sigma(M_\phi)\};$$

a se vedea definiţia 12,cap.4.

34.Observaţie
Dacă funcţia ϕ este continuă pe cerc, atunci operatorul M_ϕ este inversabil dacă şi numai dacă $\phi(e^{it}) \neq 0$, $\forall e^{it} \in \mathcal{S}^1$, (a se vedea exemplul 9(vi),cap.4). Rezultă deci că în acest caz spectrul operatorului M_ϕ coincide cu imaginea funcţiei ϕ . De exemplu, dacă $\phi(e^{it}) = e^{it} - 2$, atunci:

$$\sigma(M_\phi) = \mathrm{essran}(\phi) = \phi(\mathcal{S}^1) = \{\lambda \in C \, ; \, |\lambda + 2| = 1\}.$$

În particular, operatorul M_ϕ este inversabil (deoarece $0 \notin \sigma(M_\phi)$) şi inversul său este:

$$((M_\phi)^{-1} f)(e^{it}) = \frac{1}{e^{it} - 2} f(e^{it}) \, , \, \forall f \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Să considerăm acum un exemplu în care funcţia multiplicator nu este continuă; fie , de exemplu:

$$\psi(e^{it}) = \frac{e^{it} - i}{e^{it} + i} \, , \, \text{dacă}\, t \in [0, \, \pi) \text{ şi } \psi(e^{it}) = 1 \, , \, \text{dacă}\, t \in [\pi, \, 2\pi).$$

Atunci imaginea funcţiei ψ este:

$$\psi(\mathcal{S}^1) = \{1\} \bigcup \{it \, ; \, t \in [-1, 1)\} \, ,$$

şi deci imaginea esenţială a lui ψ este (cf. exemplului 9(vi),cap.4):

$$\overline{\psi(\mathcal{S}^1)} = \{1\} \bigcup \{it \, ; \, t \in [-1, 1]\} = \sigma(M_\psi).$$

În particular, operatorul M_ψ nu este inversabil.
Tot în legătură cu acest exemplu, se observă uşor că $\lambda = 1$ este va-

loare proprie a operatorului M_ψ. Într-adevăr, orice funcţie neidentic nulă $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ care se anulează pe submulţimea $\{e^{it}\,;\, t \in [0, \pi]\}$, verifică egalitatea $M_\psi f = \psi f = f$, deci este vector propriu (asociat valorii proprii 1) al operatorului M_ψ.
În general, se poate demonstra că λ este valoare proprie pentru operatorul M_ϕ dacă şi numai dacă mulţimea pe care funcţia ϕ ia valoarea λ are măsură nenulă ([10],p.40).

35.Observaţie
Aşa cum am menţionat, rezultatele demonstrate mai sus sunt adevărate şi în cazul general al unui operator de multiplicare
$M_\psi : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)$, cu funcţia $\psi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, iar spaţiul cu măsură (Ω, μ) este $\sigma-$finit. Propunem cititorului să adapteze în mod corespunzător demonstraţiile.
Să considerăm acum câteva exemple pe R. Fie deci $\Omega = R$, măsura μ măsura Lebesgue (pe R) şi fie

$$\phi(x) = \frac{1 + 2x^2}{1 + x^2}\,, \forall x \in R.$$

Atunci $\phi \in L^\infty(R)$ şi $\phi(R) = [1, 2)$. Rezultă deci că $\sigma(M_\phi) = [1, 2]$; în particular, operatorul M_ϕ este pozitiv şi inversabil.
Vom da acum un exemplu de operator de multiplicare unitar pe $L^2(R)$; fie $\psi(x) = \frac{x+i}{ix+1}$, $\forall x \in R$. Atunci $\sigma(M_\psi) = \mathcal{S}^1$, deci M_ψ este unitar.
Pentru a obţine proiectori, trebuie ca multiplicatorul ψ să fie funcţia caracteristică a unei mulţimi măsurabile. De exemplu, pentru orice $\tau \in R$ (fixat) fie χ_τ funcţia caracteristică a intervalului $(-\infty, \tau]$. Atunci operatorul de multiplicare cu χ_τ este proiectorul pe subspaţiul (din $L^2(R)$) al funcţiilor care se anulează pe intervalul (τ, ∞); el se numeşte operatorul de trunchiere la momentul τ, iar o notaţie uzuală este P_τ. Evident, $\sigma(P_\tau) = \sigma_p(P_\tau) = \{0, 1\}$.

36.Observaţie
Operatorii de multiplicare au şi alte proprietăţi remarcabile. De exemplu, mulţimea operatorilor de multiplicare, $\mathcal{M} = \{M_\phi\,;\, \phi \in L^\infty(\Omega, \mu)\}$ este o $C^\star$-algebră comutativă, iar aplicaţia $L^\infty(\Omega, \mu) \ni \phi \to M_\phi \in \mathcal{M}$ este un izomorfism de $C^\star$-algebre. Mai mult, algebra $\mathcal{M}$ este maximal abeliană; aceasta înseamnă că un operator care comută cu toţi operatorii de multiplicare este el însuşi un operator de multiplicare. Această proprietate permite o altă demonstraţie pentru spectrul lui M_ϕ ;[5],p.89.

37.Propoziţie
Fie $(H, <,>_H)$ şi $(K, <,>_K)$ două spaţii Hilbert şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$ şi $S \in \mathcal{L}(K)$. Operatorii T şi S se numesc **unitar-echivalenţi** dacă există un izomorfism de spaţii Hilbert (a se vedea definiţia 7,cap.1) $U : H \to K$ astfel încât

$$T = U^{-1}SU.$$

De exemplu, în capitolul 2 (teorema 28), am demonstrat că un operator normal pe C^n este unitar-echivalent cu un operator diagonal.
Doi operatori unitar-echivalenţi au acelaşi spectru, aceeaşi normă, aceleaşi valori proprii, acelaşi spectru punctual aproximativ.
De asemenea, dacă S este inversabil, atunci:

$$T^\star = U^{-1}S^\star U \text{ şi } T^{-1} = U^{-1}S^{-1}U.$$

Demonstraţie Reamintim că prin izomorfism de spaţii Hilbert (sau operator unitar) se înţelege un operator liniar bijectiv cu proprietatea $< Ux, Uy >_K = < x, y >_H$, $\forall x, y \in H$. Să demonstrăm de exemplu egalitatea $\sigma(S) = \sigma(T)$; dacă $\lambda \in C$, atunci $\lambda I - S$ este inversabil $\Leftrightarrow$ $U^{-1}(\lambda I - S)U$ este inversabil $\Leftrightarrow$ $\lambda I - U^{-1}SU$ este inversabil.
Pentru a demonstra egalitatea $T^\star = U^{-1}S^\star U$, trebuie să definim adjunctul unui operator oarecare, $A : H \to K$; procedându-se în mod analog cazului $H = K$ (propoziţia 1 din acest capitol) se demonstreză existenţa unui operator

$$A^\star : K \to H, \text{ astfel încât } < Au, v >_K = < u, A^\star v >_H \ \forall u \in H \text{ şi } v \in K.$$

Un alt mod de a demonstra existenţa lui $A^\star$ este de a particulariza definiţia adjunctului unui operator între două spaţii normate (a se vedea teorema 29,cap.3) pentru spaţii Hilbert (se foloseşte teorema lui Riesz: teorema 13,cap.1).
Proprietăţile lui $A^\star$ sunt practic identice cu cele din cazul $H = K$; de exemplu, dacă $A = U$ este unitar , atunci $U^\star = U^{-1}$. Rezultă deci $T^\star = (U^{-1}SU)^\star = U^{-1}S^\star U$. În mod analog se demonstrează celelalte proprietăţi.
O clasă de operatori care sunt unitar echivalenţi cu operatorii de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$ sunt **operatorii de convoluţie** pe spaţiul $\ell^2(Z)$.
Reamintim că dacă α şi β sunt două şiruri definite pe Z, atunci convoluţia lor este şirul notat $\alpha \star \beta$ definit prin:

$$(\alpha \star \beta)(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(k)\beta(n-k),$$

în ipoteza că seria converge pentru orice $n \in Z$ fixat. Produsul de convoluţie este comutativ, asociativ, distributiv faţă de adunare şi are element neutru

şirul $\sigma_o(n) = 1$ dacă $n = 0$ şi 0 în rest; a se vedea exemplul 2(vi),cap.4.

38.Definiţie (operatorul de convoluţie pe Z)
Fie un şir $\theta \in \ell^2(Z)$ astfel încât:
(i) $\theta \star x \in \ell^2(Z)\,,\ \forall x \in \ell^2(Z)$.
Cu această condiţie îndeplinită, putem defini **operatorul de convoluţie** cu θ prin relaţia:

$$C_\theta : \ell^2(Z) \to \ell^2(Z)\,,\ C_\theta x = \theta \star x.$$

Menţionăm că restricţia $\theta \in \ell^2(Z)$ este necesară pentru existenţa transformatei Fourier inverse $\mathcal{F}^{-1}\theta$.
Liniaritatea operatorului C_θ este evidentă; continuitatea şi o explicitare a condiţiei **(i)** urmează a fi studiate în continuare.
Pentru aceasta, vom demonstra că operatorul de convoluţie este unitar echivalent cu un operator de multiplicare.

In definiţia 21,cap.1 am văzut că transformarea Fourier:

$$\mathcal{F} : L^2(\mathcal{S}^1) \to \ell^2(Z)\,,\ \mathcal{F}f = \hat{f},$$

unde $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(e^{it})e^{-int}dt$, este un izomorfism de spaţii Hilbert. Inversa ei este definită prin:

$$\mathcal{F}^{-1}x = \sum_{n\in Z} x(n)\omega_n,$$

unde, am notat $\omega_n(e^{it}) = e^{int}$, (ca în definiţia 18,cap.1).
Reamintim de asemenea că restricţia lui $\mathcal{F}^{-1}$ la $\ell^1(Z)$ admite o formulă punctuală (a se vedea teorema 22,cap.1):

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\alpha\right)(e^{it}) = \sum_{n\in Z} \alpha(n)e^{int},\ \forall \alpha \in \ell^1(Z).$$

39.Lemă
Pentru orice $\alpha, \beta \in \ell^1(Z)$, are loc egalitatea:

$$\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta) = (\mathcal{F}^{-1}\alpha)(\mathcal{F}^{-1}\beta).$$

Demonstraţie Deoarece α şi β sunt în $\ell^1(Z)$, convoluţia $\alpha \star \beta$ există şi aparţine de asemenea spaţiului $\ell^1(Z)$ (cf. exemplului 2(vi),cap.4).
Pentru orice $e^{it} \in \mathcal{S}^1$, avem:

$$[\mathcal{F}^{-1}(\alpha \star \beta)](e^{it}) = \sum_{n\in Z} (\alpha \star \beta)(n)e^{int} = \sum_{n\in Z}\sum_{k\in Z} \alpha(k)\beta(n-k)e^{int} =$$

$$= \sum_{k\in Z}[\alpha(k)\sum_{m\in Z}\beta(m)e^{i(k+m)t}] = (\sum_{k\in Z}\alpha(k)e^{ikt})(\sum_{m\in Z}\beta(m)e^{imt}) =$$
$$= [(\mathcal{F}^{-1}\alpha)(\mathcal{F}^{-1}\beta)](e^{it}),$$

schimbarea ordinei de sumare fiind posibilă deoarece seriile sunt absolut convergente.

40.Teoremă
(a) Fie $\theta \in \ell^2(Z)$; atunci: $(\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F})f = (\mathcal{F}^{-1}\theta)f$, $\forall f \in L^2(\mathcal{S}^1)$.
(b) Operatorul de convoluţie cu θ este corect definit (în sensul că îndeplineşte condiţia **(i)** din definiţia 38) dacă şi numai dacă

$$\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1);$$

în acest caz, C_θ este operator continuu şi este unitar echivalent cu operatorul de multiplicare cu $\mathcal{F}^{-1}\theta$, adică $\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F} = M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}$.

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(Z) \arrow[r, "C_\theta"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}"'] & \ell^2(Z) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}"] \\
L^2(\mathcal{S}^1) \arrow[r, "M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}"] & L^2(\mathcal{S}^1)
\end{tikzcd}$$

(c) Reciproc, fiind dat un operator de multiplicare M_ϕ pe $L^2(\mathcal{S}^1)$, (deci $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$), există un operator de convoluţie pe $\ell^2(Z)$, şi anume $C_{\widehat{\phi}}$ astfel $M_\phi = \mathcal{F}^{-1}C_{\widehat{\phi}}\mathcal{F}$.
Demonstraţie (a) Vom demonstra egalitatea de la punctul **(a)** pentru funcţiile $\omega_n(e^{it}) = e^{int}$, $\forall n \in Z$ în ipoteza suplimentară $\theta \in \ell^1(Z)$.
Pentru aceasta, calculăm mai întâi $\mathcal{F}\omega_n$:

$$(\mathcal{F}\omega_n)(m) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{int}e^{-imt}dt = \sigma_n(m), \forall m \in Z,$$

unde, reamintim,

$$\sigma_n(m) = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad m = n \\ 0 & \text{dacă} \quad m \neq n \end{cases}$$

Să mai observăm că $\sigma_n \in \ell^1(Z)$ şi deci (cf. teoremei 22,cap.1):

$$\left(\mathcal{F}^{-1}\sigma_n\right)(e^{it}) = e^{int}, \forall e^{it} \in \mathcal{S}^1.$$

Fie $\theta \in \ell^1(Z)$; atunci, în baza lemei anterioare, avem:

$$\mathcal{F}^{-1}C_\theta\mathcal{F}\omega_n = \mathcal{F}^{-1}(\theta \star \sigma_n) = \left(\mathcal{F}^{-1}\theta\right)\omega_n, \forall n \in Z.$$

Deoarece subspaţiul liniar generat de funcţiile $\{\omega_n\}_{n\in Z}$ este dens în $L^2(\mathcal{S}^1)$, egalitatea **(a)** este adevărată pentru orice $f \in L^2(\mathcal{S}^1)$ pentru că $\mathcal{F}$ şi $\mathcal{F}^{-1}$, sunt aplicaţii continue (în norma $\| \|_2$).
Acum, egalitatea **(a)** rezultă şi pentru $\theta \in \ell^2(Z)$, deoarece $\ell^1(Z)$ este dens în $\ell^2(Z)$, (a se vedea exemplul 4(iv),cap.1).
(b) Totul rezultă acum din proprietăţile operatorului de multiplicare cu $\mathcal{F}^{-1}\theta$; am demonstrat (în lema 32) că acesta (şi deci şi C_θ) este corect definit (şi în acest caz şi continuu) dacă şi numai dacă funcţia multiplicator $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este esenţial mărginită pe $\mathcal{S}^1$.
(c) Fie $\phi \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$; atunci, pentru orice $n \in Z$, avem:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|\phi(e^{it})e^{-int}|dt \leq \| \phi \|_\infty < \infty,$$

şi deci funcţia ϕ are transformată Fourier:

$$\widehat{\phi} : Z \to C \, , \, \widehat{\phi}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\phi(e^{it})e^{-int}dt.$$

Faptul că operatorul $C_{\widehat{\phi}}$ este corect definit şi este unitar echivalent cu M_ϕ rezultă din **(a)** şi **(b)**.
Să observăm că demonstraţia punctului **(c)** s-a bazat în mod esenţial pe faptul că măsura (Lebesgue) a cercului unitate este finită, ceea ce implică faptul că o funcţie din $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ are transformată Fourier (coeficienţi Fourier), deoarece $L^\infty(\mathcal{S}^1) \subset L^2(\mathcal{S}^1)$.

41.Corolar (proprietăţile operatorului de convoluţie pe Z)
Fie $\theta : Z \to C$ astfel încât $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ şi fie C_θ operatorul de convoluţie asociat; atunci, din teorema de mai sus şi din proprietăţile operatorilor de multiplicare demonstrate anterior, avem:
(a) $\| C_\theta \| = \| M_{\mathcal{F}^{-1}\theta} \| = \| \mathcal{F}^{-1}\theta \|_\infty$.
(b) $\sigma(C_\theta) = \sigma(M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}) = \text{essran}(\mathcal{F}^{-1}\theta)$.
(c) Dacă şirul $\theta \in \ell^1(Z)$, atunci funcţia $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este continuă pe $\mathcal{S}^1$, deci (deoarece $\mathcal{S}^1$ este compact) ea este şi mărginită şi spectrul lui C_θ este imaginea funcţiei $\mathcal{F}^{-1}\theta$:

$$\sigma(C_\theta) = (\mathcal{F}^{-1}\theta)(\mathcal{S}^1).$$

În particular, în acest caz, C_θ este operator inversabil dacă şi numai dacă $\mathcal{F}^{-1}\theta$ nu se anulează pe $\mathcal{S}^1$.

(d) Dacă C_θ este operator inversabil, atunci inversul său este operatorul de convoluţie cu $\mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right)$, adică

$$C_\theta^{-1}x = \mathcal{F}\left(\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}\right) \star x, \, \forall x \in \ell^2(Z).$$

Pentru demonstraţia punctului **(d)**, trebuie arătată mai întâi egalitatea:

$$\widehat{f\,g} = \widehat{f} \star \widehat{g}, \, \forall f, g \in L^2(\mathcal{S}^1).$$

Lăsăm detaliile ca exerciţiu.

42.Exemplu

(i) Operatorul de translaţie bilateral W (din definiţia 23) este un operator de convoluţie; într-adevăr, $W = C_{\sigma_1}$.
Mai general, W^n este operatorul de convoluţie cu şirul σ_n, pentru orice $n \in Z$.
Deoarece $(\mathcal{F}^{-1}\sigma_n)(e^{it}) = \omega_n(e^{it}) = e^{int}$, rezultă că W^n este unitar-echivalent cu M_{ω_n}:

$$\mathcal{F}^{-1}W^n\mathcal{F} = M_{\omega_n}.$$

În particular, $(\mathcal{F}^{-1}W\mathcal{F}f)(e^{it}) = e^{it}f(e^{it})$.

În continuare prezentăm **operatorul de convoluţie** pe R; rezultatele sunt similare celor din cazul Z, cu excepţia punctului **(c)** din teorema 40. Demonstraţiile vor fi omise, principalele referiri bibliografice sunt [17],p.49; [13],p.192; [6],p.949.

43.Definiţie (operatorul de convoluţie pe R)

Fie $L^1(R)$ spaţiul Banach al funcţiilor integrabile (a se vedea exemplul 4(iv),cap.1 şi 2(vii),cap.4) şi fie $k \in L^1(R)$. Atunci, pentru orice funcţie $f \in L^2(R)$, convoluţia $(k \star f)(x) = \int\limits_R k(x-y)f(y)dy$ defineşte o funcţie din $L^2(R)$ şi în plus $\| k \star f \|_2 \leq \| k \|_1 \| f \|_2$; pentru demonstraţie, recomandăm [6],p.951.
Rezultă deci că **operatorul de convolutie** cu funcţia $k \in L^1(R)$ este corect definit pe spaţiul $L^2(R)$:

$$C_k : L^2(R) \to L^2(R)\,,\, C_k f = k \star f.$$

44.Observaţie
Reamintim câteva proprietăţi ale **transformatei Fourier pe** R; ca bibliografie recomandăm [1],p.482; [17],p.76; [13],p.192; [15],p.6.
Pentru orice funcţie $k \in L^1(R)$, transformata sa Fourier este, prin definiţie

$$(\mathcal{F}k)(x) = \widehat{k}(x) = \int_R k(y)e^{-ixy}dy\,,\ \forall x \in R.$$

Funcţia $\widehat{k}$ este continuă şi mărginită pe R şi $\| \widehat{k} \|_\infty \leq \| k \|_1$. Menţionăm că există funcţii continue şi mărginite pe R care nu sunt transformate Fourier ale unor funcţii din $L^1(R)$.
Restricţia aplicaţiei $\mathcal{F}$ la subspaţiul $K = L^1(R) \bigcap L^2(R)$ ia valori în $L^2(R)$ şi deci, deoarece K este dens în $L^2(R)$, (cf.exemplului 4(iv),cap.1), ea se poate prelungi prin continuitate (în norma $\| \, \|_2$) la întregul $L^2(R)$; se obţine astfel transformarea Fourier (sau Fourier-Plancherel):

$$\mathcal{F} : L^2(R) \to L^2(R),$$

cu proprietăţile:
(a) $\mathcal{F}$ este un izomorfism de spaţii Hilbert; acest rezultat este cunoscut sub numele de **teorema lui Plancherel**.
(b) $\mathcal{F}(k \star f) = \widehat{k}\widehat{f}$.
Pentru demonstraţia teoremei lui Plancherel, recomandăm: [13],p.187; [15],p.26.

45.Teoremă (proprietăţile operatorului de convoluţie pe R**)**
Fie $k \in L^1(R)$, fie C_k operatorul de convoluţie cu k , $\mathcal{F}$ transformarea Fourier şi $M_{\widehat{k}}$ operatorul multiplicare cu $\widehat{k}$; atunci:
(a) $C_k = \mathcal{F}^{-1} M_{\widehat{k}} \mathcal{F}$.
(b) $\| C_k \| = \| M_{\widehat{k}} \| = \| \widehat{k} \|_\infty$.
(c) $\sigma(C_k) = \sigma(M_{\widehat{k}}) = \overline{\widehat{k}(R)}$.
Demonstraţie Toate afirmaţiile rezultă din lema şi observaţia anterioare şi din proprietăţile corespunzătoare ale operatorului de multiplicare (a se vedea propoziţia 27 şi teorema 33).

46.Observaţie
Aşa cum am văzut, există asemănări importante între operatorii de convoluţie pe $\ell^2(Z)$ şi cei de pe $L^2(R)$. Metoda de studiu este aceeaşi: sunt unitar-echivalenţi (prin transformarea Fourier) cu operatori de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$ şi respectiv pe $L^2(R)$. În teoria sistemelor, spaţiul pe care este definit operatorul de convoluţie se numeşte domeniul timp, iar spaţiul pe care este definit operatorul de multiplicare corespunzător se numeşte domeniul frecvenţă;

unitar-echivalenţa celor doi operatori prin transformarea Fourier este denumită dualitatea timp-frecvenţă. Menţionăm totuşi o deosebire remarcabilă între cele două cazuri. Deoarece orice funcţie din $L^\infty(\mathcal{S}^1)$ are transformată Fourier, rezultă că orice operator de multiplicare pe $L^2(\mathcal{S}^1)$ este unitar echivalent cu un operator de convoluţie pe $\ell^2(Z)$ (cf. teoremei 40(c)). În schimb, există funcţii $\phi \in L^\infty(R)$ care nu au transformată Fourier: integrala $\int\limits_R \phi(t)e^{-itx}dt$ nu converge (măsura Lebesgue a lui R este ∞). Concluzie: pentru un astfel de ϕ, operatorul de multiplicare M_ϕ este corect definit pe $L^2(R)$, dar nu există un operator de convoluţie pe $L^2(R)$ unitar-echivalent cu M_ϕ prin transformarea Fourier.

Dacă $M_T = (a_{ij})\,, i,j \in \{1,2,...,n\}$ este matricea unui operator T pe spaţiul C^n , atunci $(Tx)_i = \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, $\forall x = (x_1, x_2, .., x_n) \in C^n$. Un analog infinit dimensional al acestei definiţii este **operatorul integral**.

46.Definiţie (operatorul integral)
Să considerăm spaţiul Hilbert $(L^2(0,1)\,, \|\ \|_2)$ al funcţiilor de pătrat integrabil pe intervalul $[0,\ 1]$ în raport cu măsura Lebesgue; (cf. exemplului 17(iii),cap.1). Fie $K : [0,1] \times [0,1] \to C$ o funcţie de pătrat integrabil pe $[0,1] \times [0,1]$ şi fie:

$$\| K \|_2 = \sqrt{\int_0^1 \int_0^1 |K(x,y)|^2 dxdy}.$$

Demonstrăm acum că pentru orice funcţie $f \in L^2(0,1)$, funcţia g definită prin egalitatea:

$$g(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy$$

este în $L^2(0,1)$; avem (folosim inegalitatea lui Schwarz):

$$\| g \|_2^2 = \int_0^1 | \int_0^1 K(x,y)f(y)dy|^2 dx \leq$$

$$\leq \int_0^1 \left(\int_0^1 |K(x,y)|^2 dy \right) \left(\int_0^1 |f(y)|^2 dy \right) dx = \| f \|_2^2 \| K \|_2^2 .$$

Rezultă deci că putem defini aplicaţia:

$$T_K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)\,, \ (T_K f)(x) = \int_0^1 K(x,y)f(y)dy.$$

Operatorul T_K se numeşte **operatorul integral** definit de **nucleul** K . Din calculul de mai sus rezultă că T_K este continuu şi

$\| T_K \| \leq \| K \|_2$.

47.Propoziţie (proprietăţile operatorului integral)
Fie T_K şi T_H doi operatori integrali cu nucleele K şi respectiv H .
(a) Pentru orice α , $\beta \in C$, operatorul $\alpha T_K + \beta T_H$ este operator integral şi are nucleul $\alpha K + \beta H$.
(b) Operatorul $T_K T_H$ este operator integral şi are nucleul definit prin $G(x,y) = \int_0^1 K(x,z)H(z,y)dz$, deci:

$$(T_K T_H f)(x) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,z)H(z,y)dz \right) f(y)dy.$$

În cazul particular $K = H$, obţinem:

$$(T_K^2 f)(x) = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,z)K(z,y)dz \right) dx.$$

(c) Dacă şirul de nuclee K_n converge în spaţiul Hilbert $L^2([0,1] \times [0,1])$ la funcţia K , atunci şirul de operatori integrali T_{K_n} converge în spaţiul $(\mathcal{L}(L^2(0,1)) \, , \| \, \|)$ la operatorul integral T_K.
(d) Adjunctul operatorului T_K este operatorul integral $T_{\widetilde{K}}$, cu nucleul $\widetilde{K}(x,y) = \overline{K(y,x)}$; în particular, T_K este autoadjunct dacă şi numai dacă nucleul K are proprietatea $K(x,y) = \overline{K(y,x)}$ (un astfel de nucleu se numeşte simetric).
Demonstraţie (a) este evident.
(b) Pentru orice $f \in L^2(0,1)$, avem:

$$(T_K T_H f)(x) = \int_0^1 K(x,y) \left(T_H f \right)(y)dy =$$

$$= \int_0^1 \int_0^1 K(x,y)H(y,z)f(z)dzdy = \int_0^1 \left(\int_0^1 K(x,y)H(y,z)dy \right) f(z)dz =$$

$$= \int_0^1 G(x,z)f(z)dz = (T_G f)(x).$$

(c) Demonstraţia este o consecinţă imediată a inegalităţii dintre normele operatorului integral şi a nucleului său:

$$\| T_{K_n} - T_K \| \leq \| K_n - K \|_2 \to 0.$$

(d) Pentru orice $f, g \in L^2(0,1)$, avem:

$$< T_K f, g >= \int_0^1 (T_K f)(x)\overline{g(x)}dx = \int_0^1 \left(f(y) \int_0^1 K(x,y)\overline{g(x)}dx \right) dy =$$

$$= \int_0^1 f(y)\overline{\Big(\int_0^1 \widetilde{K}(y,x)g(x)dx\Big)}dy =< f, T_{\widetilde{K}}g > .$$

Proprietăţile de mai sunt adevărate şi în cazul în care intervalul $[0,1]$ (cu măsura Lebesgue) este înlocuit de un spaţiu cu măsură $\sigma-$ finită. În particular, putem considera operatori integrali pe Z şi R.
Operatorii de convoluţie sunt atunci cazuri particulare de operatori integrali, considerând nuclee de forma $K(n,m) = \theta(n-m)$, $\forall n, m \in Z$ şi respectiv $K(x-y) = k(x-y)$, $\forall x, y \in R$.
Un alt caz particular remarcabil de operator integral este **operatorul Volterra**, pe care-l vom studia în continuare.

48.Definiţie (operatorul Volterra)
Un nucleu $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$ se numeşte **nucleu de tip Volterra** dacă are proprietatea $K(x,y) = 0$, $\forall x < y$. Rezultă deci că operatorul integral asociat unui astfel de nucleu (numit **operator Volterra**) este definit prin:

$$(T_K f)(x) = \int_0^x K(x,y)f(y)dy\,,\ \forall f \in L^2(0,1).$$

Analogia cu teoria matricelor este evidentă: operatorii de tip Volterra sunt analogul operatorilor asociaţi matricelor inferior triunghiulare. Se ştie că dacă o matrice A este strict inferior triunghiulară, atunci ea este nilpotentă, adică există $m \in N$ astfel încât $A^m = O$. Vom demonstra în continuare o proprietate asemănătoare şi pentru operatorii Volterra definiţi de nuclee mărginite; o consecinţă va fi calculul spectrului unui astfel de operator.

49.Teoremă
Fie $K \in L^2([0,1]\times[0,1])$ un nucleu de tip Volterra mărginit, deci $\| K \|_\infty < \infty$; atunci, operatorul Volterra asociat, T_K are proprietăţile:
(a) $\lim\limits_{n\to\infty} (\| T_K^n \|)^{\frac{1}{n}} = 0.$
(b) $\sigma(T_K) = \{0\}$; un operator cu această proprietate se numeşte **cvasinilpotent**.
Demonstraţie Vom demonstra mai întâi că produsul a doi operatori de tip Volterra T_K şi T_H este un operator de acelaşi tip. Ţinând cont de cele demonstrate în propoziţia 47(b), este suficient să arătăm implicaţia:

$$K(x,y) = H(x,y) = 0\,, \forall x < y \Rightarrow G(x,y) = 0\,,\ \forall x < y,$$

unde, $G(x,y) = \int\limits_0^1 K(x,z)H(z,y)dz$.
Într-adevăr, dacă $x < y$, atunci orice $z \in [0,1]$ trebuie să verifice cel puţin

una din inegalităţile: $x < z$ sau $z < y$; în primul caz, avem $K(x,z) = 0$, iar în al doilea $H(z,y) = 0$, deci oricum $G(x,y) = 0$. Dacă $x \geq y$, atunci:

$$G(x,y) = \int_y^x K(x,z)H(z,y).$$

Să presupunem acum că $H = K$ şi să notăm în acest caz

$$K^{[2]}(x,y) = G(x,y) = \int_0^1 K(x,z)K(z,y)dz,$$

şi în general pentru $n \in N$:

$$K^{[n]}(x,y) = \int_0^1 K(x,z)K^{[n-1]}(z,y)dz.$$

Pentru orice $0 \leq y \leq x \leq 1$, avem:

$$|K^{[2]}(x,y)| = |\int_y^x K(x,z)K(z,y)dz| \leq \| K \|_\infty^2 (x-y).$$

Prin inducţie rezultă că pentru orice $n \in N$ şi $y \leq x$, avem:

$$|K^{[n]}(x,y)| \leq \frac{\| K \|_\infty^n}{(n-1)!}(x-y)^{n-1} \leq \frac{\| K \|_\infty^n}{(n-1)!}.$$

Rezultă deci că:

$$(\| T_K^n \|)^{\frac{1}{n}} \leq \left(\| K^{[n]} \|_\infty\right)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\| K \|_\infty}{(n-1)!^{\frac{1}{n}}} \longrightarrow 0,$$

pentru $n \longrightarrow \infty$, ceea ce încheie demonstraţia.
(b) Reamintim că raza spectrală a unui operator T este, (cf. definiţiei 12,cap.4), $\mathrm{r}(T) = \sup\{|\lambda|\,;\, \lambda \in \sigma(T)\}$; am demonstrat de asemenea (teorema 13,cap.4) formula razei spectrale: $\mathrm{r}(T) = \lim\limits_{n\to\infty} \| T^n \|^{\frac{1}{n}}$. Din definiţia razei spectrale rezultă în mod evident că dacă $\mathrm{r}(T) = 0$, atunci $\sigma(T) = \{0\}$. Din cele demonstrate la punctul **(a)**, rezultă că $\mathrm{r}(T_K) = 0$, deci $\sigma(T_K) = \{0\}$.
Mai facem observaţia că afirmaţiile din teoremă sunt adevărate şi fără ipoteză de mărginire a nucleului; demonstraţia este însă considerabil mai dificilă ([10],p.93).
Un caz particular interesant de operator Volterra se obţine considerând nucleul $V(x,y) = 1$, dacă $y \leq x$, şi 0 în rest. Operatorul asociat (numit şi **operatorul Volterra integral**) este:

$$(T_V f)(x) = \int_0^x f(y)dy\,,\ \forall f \in L^2(0,1).$$

Norma lui T_V este $\| T_V \| = \frac{1}{2\pi}$; (pentru demonstraţie: [10],p.300).

5.4 Operatori normali

50.Introducere
Reamintim că un operator $T \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte normal dacă verifică egalitatea $TT^\star = T^\star T$; în paragraful precedent am studiat o clasă importantă de operatori normali: operatorii de multiplicare.
În capitolul 2 (teorema 28) am văzut că principalul rezultat referitor la structura operatorilor din $\mathcal{L}(C^n)$ este:

Teorema spectrală pentru operatori normali pe C^n
Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este diagonalizabil în sens geometric dacă şi numai dacă T este operator normal.

Generalizarea acestui rezultat la spaţii Hilbert infinit dimensionale este o problemă fundamentală a teoriei operatorilor; ea şi câteva consecinţe ale sale constituie subiectul acestui paragraf.
În prezentarea care urmează, analogia cu cazul finit dimensional este interesantă: trebuie remarcat ce rezultate finit dimensionale au un co- respondent (asemănător) infinit dimensional şi ce anume se schimbă în totalitate.
Să revenim acum la enunţul teoremei spectrale pentru operatori normali pe spaţii finit dimensionale. Operator diagonalizabil (în sens geometric) însemna, în acel caz, un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ pentru care există o bază $\mathcal{B}$ ortonormală (a lui C^n) formată din vectori proprii ai operatorului T, sau , echivalent, există un operator unitar U astfel încât $U^{-1}TU$ să fie operator diagonal; în această situaţie matricea lui T în baza $\mathcal{B}$ are formă diagonală, (pe diagonală fiind valorile proprii ale lui T), iar coloanele matricei lui U sunt vectorii din $\mathcal{B}$. În cazul infinit dimensional, noţiunile de valoare proprie şi vector propriu nu mai constituie instrumente la fel de puternice ca în cazul finit dimensional; am dat exemple în paragraful precedent de operatori (chiar normali) care nu au valori proprii. Deci o "formă diagonală" pentru operatori normali pe spaţii Hilbert infinit dimensionale este puţin probabilă (aceasta nu exclude posibilitatea unei "forme diagonale" pentru clase mai restrânse de operatori).
Vom reformula acum noţiunea de operator diagonal pe C^n.
Fie $D \in \mathcal{L}(C^n)$ un operator diagonal, deci matricea sa în baza canonică este:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & . & . & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & . & . & . & . & \lambda_n \end{pmatrix},$$

iar $(Dx)_k = \lambda_k x_k$, $\forall x = (x_1, x_2, .., x_n) \in C^n$.

Să considerăm spaţiul C^n ca fiind mulţimea tuturor funcţiilor

$$x : \{1, 2, .., n\} \to C\,,\; x(k) = x_k,$$

vectorul $x = (x_1, x_2, .., x_n)$ identificâdu-se cu valorile funcţiei x de mai sus. Să considerăm funcţia

$$\phi : \{1, 2, .., n\} \to C\,,\; \phi(k) = \lambda_k.$$

Atunci operatorul D poate fi identificat cu operatorul de multiplicare cu ϕ:

$$(Dx)(k) = \phi(k)x(k) = (M_\phi x)(k)\,,\; \forall x \in C^n \text{ şi } k \in \{1, 2, .., n\}.$$

Spaţiul cu măsură (Ω, μ) din definiţia generală a operatorilor de multiplicare (definiţia 25 din paragraful precedent) este $\Omega = \{1, 2, .., n\}$ iar măsura μ este măsura de numărare.
Cu aceste precizări, enunţul (intr-o oarecare măsură simplificat) al teoremei spectrale pentru operatori normali pe spaţii finit dimensionale, devine:

Teoremă
Un operator $T \in \mathcal{L}(C^n)$ este unitar-echivalent cu un operator de multiplicare M_ϕ dacă şi numai dacă T este operator normal.
Această formulare (în care **operator diagonalizabil în sens geometric** înseamnă **operator unitar- echivalent cu un operator de multiplicare**) are un analog infinit dimensional.
Reamintim că în paragraful precedent am definit şi studiat operatorii de multiplicare: dacă (Ω, μ) este un spaţiu cu măsură şi dacă $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$, atunci operatorul de multiplicare cu funcţia ϕ este:

$$M_\phi : L^2(\Omega, \mu) \to L^2(\Omega, \mu)\,,\; (M_\phi f)(t) = \phi(t)f(t)\,,\; \forall t \in \Omega.$$

Am demonstrat (este de altfel evident) că operatorii de multiplicare sunt normali; reciproca acestei afirmaţii (”modulo unitar-echivalenţă”) este varianta infinit dimensională a teoremei spectrale pentru operatori normali (din cazul finit dimensional).

51.Teorema spectrală pentru operatori normali pe spaţii Hilbert infinit dimensionale
Fie H un spaţiu Hilbert infinit dimensional (separabil) şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal.
Atunci există un spaţiu cu măsură boreliană regulată finită (Ω, μ), un izomorfism de spaţii Hilbert (operator unitar) $U : H \to L^2(\Omega, \mu)$ şi o funcţie

$\phi \in L^{\infty}(\Omega, \mu)$ astfel încât $T = U^{-1} M_{\phi} U$.

$$\begin{array}{ccc} H & \xrightarrow{\quad T \quad} & H \\ \Big\downarrow U & & \Big\downarrow U \\ L^2(\Omega,\mu) & \xrightarrow{\quad M_{\phi} \quad} & L^2(\Omega,\mu) \end{array}$$

Într-o formulare concisă, teorema afirmă că **un operator este normal dacă şi numai dacă este unitar-echivalent cu un operator de multiplicare**. Pentru alte formulări (echivalente) ale acestui rezultat cât şi pentru demonstraţie, recomandăm [10],p.61; [6],p.911; [5],p.93; [20],p.71.
Un caz particular studiat deja al acestui rezultat este unitar-echivalenţa dintre operatorii de convoluţie (care sunt normali) şi cei de multiplicare; a se vedea teoremele 40 şi 45.

Consecinţele imediate (dar remarcabile) ale acestei teoreme sunt proprietăţile operatorilor normali deduse din proprietăţile corespunzătoare ale operatorilor de multiplicare; avem deci (a se vedea propoziţia 27, observaţia 28, teorema 33 şi propoziţia 37 din paragraful precedent):

52.Teoremă (proprietăţile operatorilor normali)
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal; atunci:
(a) $\sigma(T^{\star}) = \overline{\sigma(T)} = \{\overline{\lambda}\,;\, \lambda \in \sigma(T)\}$.
(b) T este autoadjunct $\Leftrightarrow$ $\sigma(T) \subset R$.
(c) T este pozitiv $\Leftrightarrow$ $\sigma(T) \subset [0, \infty)$.
(d) T este unitar $\Leftrightarrow$ $\sigma(T) \subseteq \mathcal{S}^1$.
(e) T este proiector $\Leftrightarrow$ $\sigma(T) \subseteq \{0,1\}$.
(f) $\mathrm{r}(T) = \| T \|$.
(g) $\| Tx \| = \| T^{\star}x \|$, $\forall x \in H$; se poate demonstra că această proprietate caracterizează operatorii normali.
Este interesant acum să ne reamintim analogia dintre numere complexe şi operatori de la sfârşitul paragrafului 1 (acest capitol). Este clar (din teorema de mai sus) că analogia este mai naturală dacă înlocuim în tabelul respectiv "operator" cu "operator normal".
În general, dacă T nu este un operator normal, proprietăţile de mai sus nu sunt adevărate. De exemplu, operatorul integral Volterra T_V de la sfârşitul paragrafului precedent (teorema 49) are spectrul format numai din numărul

0, dar nu este autoadjunct; în schimb, dacă un operator normal are spectrul $\{0\}$, atunci, din proprietatea **(f)** de mai sus rezultă că el este operatorul identic nul.

Ca şi în cazul finit dimensional, (a se vedea definiţia 36,cap2), o consecinţă importantă a teoremei spectrale este posibilitatea construirii unui **"calcul funcţional"** pentru operatori normali. Prezentăm în continuare această construcţie.

53.Definiţie
Dacă $T \in \mathcal{L}(H)$ este un operator arbitrar (fixat) şi $p \in C[X]$ este un polinom , $p(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ atunci, este natural să definim operatorul $p(T) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k T^k$. Am construit în felul acesta o aplicaţie (numită **"calculul funcţional polinomial al operatorului** T "):

$$C[X] \ni p \to p(T) \in \mathcal{L}(H),$$

cu proprietăţile:
$(\alpha p + \beta q)(T) = \alpha p(T) + \beta q(T)$ (liniară) şi
$(pq)(T) = p(T)q(T)$ (multiplicativă),
pentru orice $\alpha, \beta \in C$ şi $p, q \in C[X]$; demonstraţiile sunt imediate.
Din ultima egalitate rezultă că operatorii $p(T)$ şi $q(T)$ comută.
Tot cu metode elementare, şi tot pentru un operator arbitrar, putem defini $f(T)$ şi pentru anumite funcţii raţionale.
Pentru aceasta, fie $\lambda \notin \sigma(T)$ şi fie funcţia (raţională) $g(z) = \frac{1}{\lambda - z}$; o definiţie naturală pentru operatorul $g(T)$ este $g(T) = (\lambda I - T)^{-1}$. Să observăm că definiţia este corectă deoarece operatorul $\lambda I - T$ este inversabil (λ nefiind în spectrul lui T). Să mai observăm că doi operatori de forma $(\lambda I - T)^{-1}$ şi $(\nu I - T)^{-1}$ comută între ei deoarece operatorii $\lambda I - T$ şi $\nu I - T$ comută.
Mai general, fie $q(z) = \alpha(\lambda_1 - z)(\lambda_2 - z)...(\lambda_n - z)$; observăm că putem defini operatorul:

$$\frac{1}{q}(T) = \frac{1}{\alpha}(\lambda_1 I - T)^{-1}(\lambda_2 I - T)^{-1}...(\lambda_n I - T)^{-1},$$

dacă şi numai dacă $\lambda_k \notin \sigma(T)$, $\forall k \in \{1, 2, ..n\}$. Este evident că în acest caz avem:

$$\frac{1}{q}(T) = (q(T))^{-1}.$$

În cazul general, fie $p, q \in C[X]$ şi fie $f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}$, o fracţie ireductibilă. Dacă polinomul q nu se anulează pe spectrul lui T , (sau,

echivalent , funcţia f este definită pe întreg spectrul lui T), atunci definim operatorul $f(T) = p(T)[q(T)]^{-1}$. Fie $\mathcal{R}(T)$ mulţimea funcţiilor raţionale definite pe spectrul operatorului T.
Atunci aplicaţia (numită **"calculul funcţional raţional** al lui T"):

$$\mathcal{R}(T) \ni f \to f(T) \in \mathcal{L}(H),$$

prelungeşte calculul funcţional polinomial cu păstrarea liniarităţii şi a multiplicativităţii. De fapt, aplicaţia astfel construită este un morfism de algebre. Calculul funcţional astfel definit are următoarea proprietate de **"transformare a spectrului"**.

54.Propoziţie
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$; atunci, pentru orice $f \in \mathcal{R}(T)$, avem:

$$\sigma(f(T)) = \{f(\lambda)\,;\,\lambda \in \sigma(T)\} = f(\sigma(T)).$$

Demonstraţie Demonstrăm mai întâi incluziunea: $f(\sigma(T)) \subseteq \sigma(f(T))$. Pentru aceasta, fie $\nu \in f(\sigma(T))$; există deci $\lambda \in \sigma(T)$ astfel încât $\nu = f(\lambda)$. Fie funcţia

$$g(z) = \frac{f(\lambda) - f(z)}{\lambda - z}.$$

Demonstrăm că $g \in \mathcal{R}(T)$. Deoarece $f \in \mathcal{R}(T)$, singurul punct din $\sigma(T)$ în care funcţia g ar putea să nu fie definită este λ. Dacă $f = \frac{p}{q}$, cu $p, q \in C[X]$, atunci $q(\lambda) \neq 0$; avem:

$$g(z) = \frac{\frac{p(\lambda)}{q(\lambda)} - \frac{p(z)}{q(z)}}{\lambda - z} = \frac{p(\lambda)q(z) - q(\lambda)p(z)}{q(\lambda)q(z)(\lambda - z)}.$$

Polinomul $s(z) = p(\lambda)q(z) - q(\lambda)p(z)$ se anulează în $z = \lambda$, deci există un polinom $r \in C[X]$ astfel încât $s(z) = (\lambda - z)r(z)$; rezultă deci că funcţia g este

$$g(z) = \frac{r(z)}{q(\lambda)q(z)},$$

adică $g \in \mathcal{R}(T)$, deci are sens $g(T)$. Să presupunem prin absurd că $\nu = f(\lambda) \notin \sigma(f(T))$, deci există $[f(\lambda)I - f(T)]^{-1}$. Din relaţia

$$f(\lambda) - f(z) = (\lambda - z)g(z)$$

şi din multiplicativitatea calculului funcţional, rezultă:

$$f(\lambda)I - f(T) = (\lambda I - T)g(T).$$

Înmulţind ultima egalitate cu $[f(\lambda)I - f(T)]^{-1}$, obţinem:

$$(\lambda I - T)g(T)[f(\lambda I - f(T)]^{-1} = I,$$

şi, deoarece operatorii de mai sus comută , rezultă că $\lambda I - T$ este operator inversabil, contradicţie cu $\lambda \in \sigma(T)$.
Demonstrăm acum incluziunea inversă: $\sigma(f(T)) \subseteq f(\sigma(T))$.
Fie $\nu \in \sigma(f(T))$ şi presupunem prin absurd că $\nu \notin f(\sigma(T))$. Rezultă atunci că funcţia

$$h(z) = \frac{1}{\nu - f(z)}$$

este în $\mathcal{R}(T)$ şi din egalitatea $[\nu - f(z)]h(z) = 1$ rezultă

$$[\nu I - f(T)]h(T) = I,$$

adică $\nu I - f(T)$ este operator inversabil; contradicţie cu $\nu \in \sigma(f(T))$.

Prelungirea calculului funcţional (raţional) şi la alte clase de funcţii cu păstrarea liniarităţii, multiplicativităţii şi a proprietăţii de transformare a spectrului este o problemă importantă în teoria operatorilor. Există şi alte funcţii pentru care se pot da definiţii elementare.
De exemplu, dacă $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\forall z \in C$ este o funcţie întreagă atunci operatorul $f(T) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n T^n$ se poate defini pentru pentru orice $T \in \mathcal{L}(H)$ (deoarece seria de operatori converge) şi sunt păstrate proprietăţile menţionate mai sus; am demonstrat de altfel acest fapt în teorema 28,cap.4.
Un alt exemplu este funcţia $f(z) = \overline{z}$; în acest caz, o definiţie naturală ar fi $f(T) = T^\star$. De aici rezultă că dacă $g(z) = |z|^2$, atunci $g(T) = T^\star T$ (sau $TT^\star$?) ; dacă operatorul T ar fi normal, definiţia nu ar fi ambiguă. Să alegem de exemplu $g(T) = T^\star T$, şi să luăm $T = V$ operatorul de translaţie unilaterală pe $\ell^2(N)$, (cf exemplului 20 din paragraful precedent). Atunci proprietatea de transformare a spectrului nu mai este adevărată ; într-adevăr, deoarece $g(V) = V^\star V = I$, atunci

$$\sigma(g(V)) = \sigma(I) = \{1\} \text{ dar}$$

$$g(\sigma(V)) = g(\{\lambda \in C\,;\, |\lambda| \leq 1\}) = [0, 1].$$

Operatorii care admit un calcul funcţional suficient de general şi cu proprietăţi remarcabile sunt operatorii normali. Pentru aceasta, definim calculul

funcţional mai întâi pentru operatorii de multiplicare (ceea ce se face într-un mod natural şi simplu) şi apoi vom transfera calculul funcţional astfel construit la operatori normali arbitrari folosind unitar-echivalenţa din teorema spectrală.

55.Definiţie (calculul funcţional mărginit pentru operatorii de multiplicare)
Fie $\phi \in L^\infty(\Omega, \mu)$ şi fie M_ϕ operatorul de multiplicare cu ϕ definit pe spaţiul $L^2(\Omega, \mu)$.
Considerăm restricţia măsurii Lebesgue din plan la compactul $\sigma(M_\phi) = \text{essran}(\phi)$. Fie $F \in L^\infty(\sigma(M_\phi))$; în particular, deoarece $\sigma(M_\phi)$ este compact, F poate fi o funcţie continuă.
Deoarece $\sigma(M_\phi) = \text{essran}(\phi)$, rezultă că funcţia compunere, $F \circ \phi$ există (de fapt ea este definită a.p.t.; dacă funcţiile ϕ şi F ar fi continue, atunci $F \circ \phi$ ar fi definită peste tot şi ar fi continuă) şi este în $L^\infty(\Omega, \mu)$. Există deci operatorul de multiplicare $M_{F\circ\phi} \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu))$, ceea ce ne permite să definim operatorul $F(M_\phi) = M_{F\circ\phi}$. Aplicaţia

$$L^\infty(\sigma(M_\phi)) \ni F \to F(M_\phi) \in \mathcal{L}(L^2(\Omega, \mu))$$

se numeşte **calculul funcţional mărginit** (în sensul că F este funcţie esenţial mărginită) al operatorului M_ϕ .
Se observă că operaţia de aplicare a lui F asupra operatorului M_ϕ, înseamnă de fapt compunerea lui F cu ϕ.
Este uşor de demonstrat că aplicaţia de mai sus prelungeşte calculul funcţional cu funcţii raţionale al operatorului M_ϕ. Sunt păstrate de asemenea şi proprietăţle uzuale, inclusiv proprietatea de transformare a spectrului.

56.Teoremă
Cu notaţiile de mai sus, avem:
(a) $(\alpha F + \beta G)(M_\phi) = \alpha F(M_\phi) + \beta G(M_\phi)$,
(b) $(FG)(M_\phi) = [F(M_\phi)][G(M_\phi)]$,
(c) $\overline{F}(M_\phi) = [F(M_\phi)]^\star$,
(d) $\sigma(F(M_\phi)) = F(\sigma(M_\phi))$,
(e) Operatorii $F(M_\phi)$ şi $G(M_\phi)$ comută,
pentru orice $\alpha, \beta \in C$ şi F, G funcţii esenţial mărginite pe spectrul operatorului M_ϕ .
Demonstraţie Verificările **(a)**,**(b)** şi **(c)** sunt imediate; demonstrăm, de exemplu, **(b)**:

$$(FG)(M_\phi) = M_{(FG)\circ\phi} = M_{(F\circ\phi)(G\circ\phi)} = M_{F\circ\phi}M_{G\circ\phi} = F(M_\phi)G(M_\phi).$$

(d) Vom face demonstraţia în ipoteza că funcţia F este continuă. Propunem cititorului familiarizat cu raţionamentele specifice teoriei abstracte a măsurii să refacă demonstraţia pentru o funcţie F esenţial mărginită, ([10],p.60). Enunţul este echivalent cu $\text{essran}(F \circ \phi) = F(\text{essran}(\phi))$; se observă că dacă şi funcţia ϕ este continuă, atunci egalitatea devine banală deoarece amândoi membri sunt egali cu închiderea imaginii funcţiei compuse $F \circ \phi$, adică $\overline{(F(\phi(\Omega))}$.
Considerăm acum cazul general şi demonstrăm incluziunea $F(\sigma(M_\phi)) \subseteq$ $\subseteq \sigma(F(M_\phi))$. Fie $\nu = F(\lambda) \in F(\sigma(M_\phi))$, cu $\lambda \in \sigma(M_\phi))$. Fie E o vecinătate a lui $F(\lambda)$; pentru a demonstra că $F(\lambda) \in \sigma(F(M_\phi))$ va trebui să demonstrăm că măsura mulţimii $(F \circ \phi)^{-1}(E)$ este strict pozitivă (nenulă). Dar $(F \circ \phi)^{-1}(E) = \phi^{-1}(F^{-1}(E))$. Deoarece E este vecinătate a lui $F(\lambda)$ şi deoarece funcţia F este continuă, rezultă că $F^{-1}(E)$ este vecinătate a lui λ şi deci, din definiţia imaginii esenţiale a lui ϕ, rezultă că $\phi^{-1}(F^{-1}(E))$ are măsură strict pozitivă. Incluziunea inversă o demonstrăm prin trecere la complementare:

$$C - F(\sigma(M_\phi)) \subseteq C - \sigma(F(M_\phi)).$$

Fie deci $\lambda \notin F(\sigma(M_\phi))$. Mulţimea $\sigma(M_\phi))$ este compactă şi cum F este continuă, rezultă că mulţimea $F(\sigma(M_\phi))$ este compactă. Deoarece (din ipoteză) $\lambda \notin F(\sigma(M_\phi))$, atunci există o vecinătate E a lui λ astfel încât $E \bigcap F(\sigma(M_\phi)) = \emptyset$. Luând imaginile inverse prin funcţia F ale mulţimilor din egalitatea precedentă, obţinem

$$F^{-1}(E) \bigcap \sigma(M_\phi) = \emptyset.$$

Luând acum imaginile inverse prin funcţia ϕ, obţinem

$$\phi^{-1}(F^{-1}(E)) \bigcap \phi^{-1}(\sigma(M_\phi)) = \emptyset.$$

Dar, din definiţia imaginii esenţiale, măsura mulţimii $\Omega - \phi^{-1}(\sigma(M_\phi))$ este nulă (dacă funcţia ϕ ar fi continuă, atunci această mulţime ar fi vidă). Rezultă că şi mulţimea $(F \circ \phi^{-1})(E)$ are măsura nulă şi deci $\lambda \notin \sigma(F(M_\phi))$.

Considerăm în continuare două exemple.
(i) Fie $\phi(t) = t$, $\forall t \in [0, 1]$ şi fie

$$M_\phi : L^2(0, 1) \to L^2(0, 1),\ (M_\phi f)(t) = tf(t).$$

Atunci, $\sigma(M_\phi) = [0, 1]$ şi dacă $F \in L^\infty(0, 1)$, rezultă $F(M_\phi) = M_F$.
(ii) Fie acum $\psi(t) = \frac{t+i}{it+1}$, $\forall t \in R$ şi fie

$$M_\psi : L^2(R) \to L^2(R),\ (M_\psi f)(t) = \frac{t + i}{it + 1} f(t).$$

Atunci $\sigma(M_\psi) = \mathcal{S}^1$ şi pentru orice funcţie $F \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$(F(M_\psi)f)(t) = F\left(\frac{t+i}{it+1}\right) f(t),\ \forall f \in L^2(R).$$

Calculul funcţional mărginit pentru un operator normal arbitrar se construieşte folosind unitar-echivalenţa din teorema spectrală.

57.Definiţie (calculul funcţional mărginit pentru operatori normali)
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator normal şi fie M_ϕ operatorul de multiplicare unitar-echivalent cu el: $T = U^{-1}M_\phi U$. Dacă F este o funcţie esenţial mărginită pe spectrul operatorului T, (considerat ca spaţiu cu măsură cu restricţia măsurii Lebesgue din plan), atunci definim $F(T) = U^{-1}F(M_\phi)U$.
Din teorema de mai sus (şi din proprietăţile
operatorilor unitar-echivalenţi: propoziţia 37 din paragraful precedent), rezultă că aplicaţia

$$L^\infty(\sigma(T)) \ni F \to F(T) \in \mathcal{L}(H)$$

are proprietăţile:
(a) Liniară şi multiplicativă:

$$(\alpha F + \beta G)(T) = \alpha F(T) + \beta G(T),$$

$$(FG)(T) = F(T)G(T),$$

$\forall \alpha, \beta \in C$, $\forall F, G \in L^\infty(\sigma(T))$; din multiplicativitate rezultă că operatorii de forma $F(T)$ comută între ei.
(b) $\overline{F}(T) = [F(T)]^\star$; de aici rezultă că toţi operatorii de forma $F(T)$ sunt normali.
(c) $\sigma(F(T)) = F(\sigma(T))$.

Să considerăm ca exemplu operatorul de convoluţie pe spaţiul $\ell^2(Z)$ (operatorul de convoluţie este operator normal).
Fie deci $\theta \in \ell^2(Z)$ astfel încât $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$; a se vedea teoremele 40 şi 51. Operatorul C_θ este unitar-echivalent cu operatorul de multiplicare cu $\mathcal{F}^{-1}\theta$, mai precis $C_\theta = \mathcal{F}^{-1}M_{\mathcal{F}^{-1}\theta}\mathcal{F}$. Pentru orice funcţie $F \in L^\infty(\sigma(C_\theta)) = L^\infty(\text{essran}(\mathcal{F}^{-1}\theta))$, avem $F(C_\theta) = \mathcal{F}^{-1}M_{F\circ(\mathcal{F}^{-1}\theta)}\mathcal{F}$.
În particular, (a se vedea exemplul 42), dacă $\theta = \sigma_1$, atunci $C_{\sigma_1} = W$ (operatorul de translaţie bilateral) şi $W = \mathcal{F}^{-1}M_{\omega_1}\mathcal{F}$, unde,
$\omega_1(e^{it}) = e^{it}$. Reamintim că $\sigma(W) = \mathcal{S}^1$. Deoarece ω_1 este aplicaţia identică pe $\mathcal{S}^1$, pentru orice funcţie $F \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, avem:

$$F(W) = \mathcal{F}^{-1}M_F\mathcal{F}.$$

Mai general, dacă $n \in Z$, avem $F(W^n) = \mathcal{F}^{-1} M_{F \circ \omega_n} \mathcal{F}$, unde,
$\omega_n(e^{it}) = e^{int}$.

Aplicaţiile calculului funcţional sunt numeroase; indicăm în continuare câteva. Prima este existenţa rădăcinii pătrate pozitive pentru operatori pozitivi; comparaţia cu cazul finit dimensional este interesantă (a se vedea teorema 38,cap.2)

58.Teoremă (rădăcina pătrată pozitivă)
Fie $P \in \mathcal{L}(H)$ un operator pozitiv. Atunci există şi este unic un operator pozitiv $Q \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $Q^2 = P$; operatorul Q se numeşte rădăcina pătrată pozitivă a lui P şi se notează $\sqrt{P}$.
Demonstraţie Funcţia radical $f(t) = \sqrt{t}$ este o funcţie continuă pe spectrul operatorului P (orice operator pozitiv are spectrul în $[0, \infty)$), deci putem defini operatorul $Q = f(P) = \sqrt{P}$. Din multiplicativitatea calculului funcţional, rezultă :

$$Q^2 = [f(P)]^2 = (f^2)(P) = \mathrm{id}(P) = P,$$

unde, am notat cu $\mathrm{id}(t) = t$ funcţia identică.
Pentru unicitate, este suficient să observăm că un operator de multiplicare pozitiv, M_ϕ, are o unică rădăciă pătrată pozitivă, $M_{\sqrt{\phi}}$.
De exemplu, dacă $\phi(t) = t, \forall t \in [0,1]$, atunci operatorul M_ϕ este operator pozitiv pe $L^2(0,1)$ şi

$$(\sqrt{M_\phi} f)(t) = \sqrt{t} f(t) = (M_{\sqrt{\phi}} f)(t), \forall t \in [0,1].$$

59.Consecinţă
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator arbitrar. Atunci T este pozitiv dacă şi numai dacă există $S \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $T = S^\star S$
Demonstraţie Dacă T este operator pozitiv, atunci luăm $S = \sqrt{T}$. Reciproc, orice operator de forma $S^\star S$ este pozitiv (evident).

Altă consecinţă a calculului funcţional este descompunerea polară pentru operatorii inversabili şi pentru cei normali pe spaţii Hilbert infinit dimensionale; orice număr complex nenul z admite o unică
descompunere $z = ru$ cu $r > 0$ şi $|u| = 1$. Dacă $T \in \mathcal{L}(C^n)$, atunci T admite o descompunere de forma $T = UP$, cu U operator unitar şi P pozitiv. În general, această descompunere nu este unică decât în anumite condiţii suplimentare (de exemplu dacă T este inversabil; a se vedea teorema 40,cap.2).

60.Teoremă (descompunerea polară)
Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator arbitrar.
(a) Dacă T este inversabil , atunci există $U \in \mathcal{L}(H)$ operator unitar şi $P \in \mathcal{L}(H)$ operator pozitiv astfel încât $T = UP$. În plus, această descompunere (polară) este unică.
(b) Dacă T este normal, atunci există o descompunere polară (nu neapărat unică) $T = UP$ cu U unitar şi P pozitiv; în plus, operatorii U, P, T comută între ei.
Demonstraţie (a) Fie $P = \sqrt{T^\star T}$. Operatorul T fiind inversabil, rezultă că $T^\star T$ este şi el inversabil, deci $0 \notin \sigma(T^\star T)$. Din teorema de transformare a spectrului rezultă că $0 \notin \sigma(\sqrt{T^\star T})$ deci operatorul P este inversabil. Fie $U = TP^{-1}$. Atunci U este inversabil (ceea ce este evident); U este unitar:

$$U^\star U = P^{-1}T^\star T P^{-1} = P^{-1}P^2P^{-1} = I,$$

Unicitatea rezultă din construcţie şi din unicitatea rădăcinii pătrate pozitive.
(b) Fie funcţiile

$$p(z) = |z| \, , \, \forall z \in C \text{ şi } u(z) = \frac{z}{|z|} \, , \, \forall z \neq 0 \text{ şi } u(0) = 1.$$

Atunci p şi u sunt funcţii mărginite pe spectrul lui T . Aici se poate constata necesitatea unui calcul funcţional şi cu alte funcţii decât continue (p este continuă dar u nu este continuă). Fie $P = p(T)$ şi $U = u(T)$. Deoarece funcţia p ia valori pozitive, din teorema de transformare a spectrului rezultă că operatorul P are spectrul în $[0, \infty)$. Cum P este şi operator normal (din definiţia 57(b)), rezultă că P este operator pozitiv. Deoarece $u(z)\overline{u(z)} = 1$, $\forall z \in C$, din multiplicativitatea calculului funcţional rezultă $UU^\star = U^\star U = I$, deci U este unitar. Din identitatea $u(z)p(z) = z$, $\forall z \in C$, rezultă (folosind iarăşi multiplicativitatea calculului funcţional) $T = UP$.

Continuăm cu aplicaţii ale calculului funcţional şi ale formulei de descompunere polară. Orice număr real şi strict pozitiv t se poate scrie sub forma $t = e^s$, cu $s \in R$; de asemenea, orice număr complex λ cu $|\lambda| = 1$, se poate scrie sub forma $\lambda = e^{i\tau}$, cu $\tau \in R$. Pentru operatori liniari şi continui pe un spaţiu Hilbert, avem:

61.Propoziţie
(i) Pentru orice operator pozitiv şi inversabil $P \in \mathcal{L}(H)$, există un operator autoadjunct $S \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $P = \exp(S)$.
(ii) Pentru orice operator unitar $U \in \mathcal{L}(H)$, există un operator autoadjunct $A \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $U = \exp(iA)$.

Demonstraţie (i) Deoarece operatorul P este pozitiv şi inversabil, rezultă că $\sigma(P) \subset (0, \infty)$; rezultă deci că funcţia (continuă) logaritm natural, ln este definită pe spectrul operatorului P şi deci putem defini operatorul $S = \ln(P)$; deoarece $e^{\ln(x)} = x$, $\forall x > 0$, avem egalitatea:

$$\exp(S) = \exp(\ln(P)) = P.$$

Din proprietăţile calculului funcţional rezultă că S este operator normal, iar din teorema de transformare a spectrului rezultă incluziunea: $\sigma(S) = \ln(\sigma(P)) \subset \ln((0, \infty)) = R$. Din teorema 52(b) rezultă că S este operator autoadjunct.
(ii) Deoarece U este operator unitar, rezultă că spectrul său este inclus în cercul unitate: $\sigma(U) \subseteq \mathcal{S}^1$. Fie $f \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ astfel încât $\exp(if(\lambda)) = \lambda$, $\forall \lambda \in \mathcal{S}^1$. Facem menţiunea că o astfel de funcţie există, ea putând fi, de exemplu, una din ramurile argumentului (care nu este continuă, dar este mărginită); dacă spectrul lui U nu este egal cu întreg cercul unitate, atunci există chiar funcţii continue cu proprietatea $\exp(if(\lambda)) = \lambda$, $\forall \lambda \in \sigma(U)$. Definim operatorul $A = f(U)$; din proprietăţile calculului funcţional rezultă că A este operator autoadjunct şi $\exp(iA) = \exp(if(U)) = U$.

62.Teoremă
(i) Orice operator inversabil $T \in \mathcal{L}(H)$ se poate scrie ca un produs de două exponenţiale, mai precis, există doi operatori autoadjuncţi $S, A \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $T = \exp(iA)\exp(S)$.
(ii) Mulţimea $\mathcal{G}$ a operatorilor inversabili din $\mathcal{L}(H)$ este conexă prin arce, adică pentru orice operator inversabil T, există o aplicaţie continuă $\gamma : [0,1] \to \mathcal{G}$ astfel încât $\gamma(0) = I$ şi $\gamma(1) = T$.
Demonstraţie (i) Fie $T \in \mathcal{L}(H)$ un operator inversabil şi fie, conform teoremei 60(a), descompunerea sa polară (unică): $T = UP$, unde, U este operator unitar şi P este operator pozitiv şi inversabil. Conform propoziţiei anterioare, există doi operatori autoadjuncţi $A, S \in \mathcal{L}(H)$ astfel încât $U = \exp(iA)$ şi $P = \exp(S)$, deci $T = \exp(iA)\exp(S)$.
Menţionăm că există operatori inversabili T care nu se pot scrie sub forma unei singure exponenţiale. Pe spaţii finit dimensionale, această proprietate este totuşi adevărată.
(ii) Fie $T \in \mathcal{G}$ şi fie $A, S \in \mathcal{L}(H)$, operatori autoadjuncţi astfel încât $T = \exp(iA)\exp(S)$. Fie

$$\gamma : [0,1] \to \mathcal{G},\ \gamma(t) = \exp(itA)\exp(tS).$$

Este uşor de arătat că γ satisface condiţiile cerute.

Capitolul 6

Aplicaţii în teoria sistemelor

Într-o formulare generală, un sistem este o aplicaţie între două spaţii de semnale: intrări (comenzi) şi ieşiri (răspunsuri); modelul matematic pentru semnale sunt funcţiile. Desigur, pentru a obţine rezultate interesante, sunt necesare unele condiţii restrictive. Un caz important este cel al sistemelor liniare: aici semnalele sunt elemente ale unor spaţii vectoriale, iar sistemul este o aplicaţie liniară. O altă proprietate remarcabilă este continuitatea; modelul matematic uzual pentru sistem este atunci acela al unui operator liniar şi continuu între două spaţii Banach. În acest capitol ne propunem să prezentăm câteva noţiuni din teoria sistemelor care se modelează în mod natural folosind conceptele şi rezultatele expuse în capitolele precedente. Prin sistem vom înţelege în continuare un operator liniar şi continuu pe un spaţiu Hilbert. Elementele acestui spaţiu (de obicei funcţii de timp) vor fi intrările şi ieşirile sistemului. Aşa cum am mai spus, o parte din proprietăţile intuitive ale unui sistem îşi găsesc imediat un corespondent matematic: liniaritate, continuitate. De asemenea, metodele folosite pentru studiul sistemelor sunt în mod natural rezultate de analiză funcţională. Pe lângă acestea, există şi unele constrângeri fizice, cât şi unele metode de studiu tipice teoriei sistemelor. Dintre acestea amintim cauzalitatea şi invarianţa în timp, iar ca metodă de studiu descompunerea în spaţii de stări a unui sistem. Prezentarea unor modele matematice pentru aceste noţiuni constituie obiectul acestui capitol. Pentru aprofundarea cunoştinţelor privind modelele matematice ale teoriei sistemelor, recomandăm următoarele lucrări: [1],[7],[12],[17],[18].

6.1 Cauzalitate şi invarianţă în timp

Intuitiv, un sistem este cauzal dacă ieşirea la orice moment (fixat) depinde numai de valorile intrării la momente anterioare.
De exemplu să considerăm spaţiul Hilbert $\ell^2(Z)$ şi sistemul (operatorul) de translaţie bilaterală: $(Wx)(n) = x(n-1)\,,\, \forall n \in Z$. Evident că W satisface condiţia (intuitivă) de mai sus: ieşirea la momentul n este egală cu intrarea la momentul $n-1$. Să considerăm acum adjunctul (care coincide aici cu inversul: a se vedea teorema 24, cap.5) lui W, care este $(W^\star x)(n) = x(n+1)$. Evident, sistemul $W^\star$ nu este cauzal. El are chiar o proprietate duală cauzalităţii : ieşirea la un moment dat depinde numai de valorile intrării la momente posterioare; un astfel de sistem se numeşte anticauzal. Cadrul care permite o defintie pentru cauzalitate este spaţiul Hilbert cu rezoluţie.

1.Definiţie
Fie $(H, <,>)$ un spaţiu Hilbert (ca de obicei separabil şi complex). Reamintim că un operator $P \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte proiector dacă
$P^2 = P$. Dacă P şi Q sunt proiectori, atunci, prin definiţie, $P \leq Q$ dacă $P(H) \subseteq Q(H)$ (a se vedea paragraful 2,cap.5). Fie $\mathcal{T}$ o mulţime total ordonată având t_o şi t_∞ cel mai mic şi respectiv cel mai mare element. Prin **rezoluţie a identităţii** pe spaţiul H se înţelege orice familie de proiectori $\mathcal{P} = (P_t)_{t\in\mathcal{T}}$ cu proprietăţile:
(i) $P_t \leq P_s\,,\, \forall t \leq s, t, s \in \mathcal{T}$.
(ii) $P_{t_o} = O$ şi $P_{t_\infty} = I$.
(iii) Dacă $P_{t_n} \in \mathcal{P}$ astfel încât $\lim\limits_{n\to\infty} P_{t_n}x = Px\,,\, \forall x \in H$, atunci $P \in \mathcal{P}$.
Perechea $(H, \mathcal{P})$ se numeşte **spaţiu Hilbert cu rezoluţie**. Evident, pe acelaşi spaţiu Hilbert se pot defini mai multe rezoluţii. Interpretarea intuitivă a definiţiei este : mulţimea $\mathcal{T}$ este timpul, iar dacă $x \in H$, atunci $P_t x$ este partea (eşantionul) lui x de până la momentul t, iar $(I - P_t)x$ este partea lui x de după momentul t.

Vom introduce în continuare rezoluţiile canonice pe câteva spaţii Hilbert uzuale.

2.Exemple
(a) Pe spaţiul C^n, rezoluţia canonică este definită de mulţimea de proiectori $\{P_k\,;\, k = 0, 1, 2.., n\}$, unde $P_o = O$ şi $(P_k x)(m) = x(m)$ dacă $m \leq k$ şi 0 dacă $m > k$. Evident, în acest caz $\mathcal{T} = \{0, 1, 2, .., n\}$.
(b) Să considerăm acum spaţiul Hilbert $\ell^2(Z)$.
Fie $\mathcal{T} = \{-\infty\} \cup Z \cup \{\infty\}\,,\, P_{-\infty} = O\,,\, P_\infty = I$ şi pentru orice $n \in Z$ definim proiectorul $(P_n x)(m) = x(m)\,$, dacă $m \leq n$ şi 0 dacă $m > n$. Rezoluţia

$\mathcal{P} = (P_n)_{n\in\mathcal{T}}$ este rezoluţia canonică pe $\ell^2(Z)$.

(c) Pe spaţiul $\ell^2(N)$ rezoluţia canonică se defineşte analog. $\mathcal{T} = N \cup \{\infty\}$, $P_o = O$, $P_\infty = I$, iar P_n cu $n \in N$ ca mai sus.

(d) Fie acum spaţiul Hilbert al funcţiilor de pătrat integrabil pe R, $L^2(R)$. Fie $\mathcal{T} = \{-\infty\} \cup R \cup \{\infty\}$, $P_{-\infty} = O$ şi $P_\infty = I$. Pentru orice $t \in R$, definim proiectorul (numit şi trunchierea la momentul t) $(P_t f)(x) = f(x)$ dacă $x \le t$ şi 0 dacă $x > t$.

Analog se definesc rezoluţiile canonice pe spaţiile $L^2(0,\infty)$ şi $L^2[0,1]$.

3.Definiţie

Fie $(H,\mathcal{P})$ un spaţiu Hilbert cu rezoluţie şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Sistemul T se numeşte **cauzal** (sau operator **subdiagonal**, **inferior triunghiular**) în raport cu rezoluţia fixată pe H dacă pentru orice $x, y \in H$ cu proprietatea $P_t x = P_t y$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$, rezultă $P_t T x = P_t T y$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$. Interpretarea intuitivă este evidentă: dacă intrările x şi y sunt egale până la momentul t, atunci şi ieşirile corespunzătoare, Tx şi Ty sunt egale până la momentul t. Folosind liniaritatea operatorului T, obţinem următoarele caracterizări echivalente:

4.Propoziţie

Fie $(H,\mathcal{P})$ un spaţiu Hilbert cu rezoluţie şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

(i) T este cauzal în raport cu rezoluţia $\mathcal{P}$.

(ii) $P_t T = P_t T P_t$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$.

(iii) $T(I - P_t) = (I - P_t)T(I - P_t)$, $\forall P_t \in \mathcal{P}$.

(iv) Pentru orice $P_t \in \mathcal{P}$, subspaţiul $\mathrm{Ker}(P_t)$ este invariant pentru operatorul T.

Demonstraţie (i)$\Rightarrow$ (ii) Pentru $\forall x \in H$, avem $P_t[(I - P_t)x] = 0 = P_t 0$ şi deci, deoarece T este cauzal, rezultă $P_t[T(I - P_t)x] = P_t T 0 = 0$, adică $P_t T x = P_t T P_t x$.

Echivalenţa **(ii)**$\Leftrightarrow$ **(iii)** este evidentă.

(iii)$\Rightarrow$ **(iv)** Fie $x \in \mathrm{Ker}(P_t)$; din **(ii)**, avem: $P_t T x = P_t T P_t x = 0$.

(iv)$\Rightarrow$ **(i)** Fie $x, y \in H$ astfel încât $P_t x = P_t y$. Rezultă că $P_t(x - y) = 0$, deci $x - y \in \mathrm{Ker}(P_t)$. Din ipoteza **(iv)**, rezultă că $T(x - y) \in \mathrm{Ker}(P_t)$, adică $P_t T(x - y) = 0$, ceea ce arată că T este sistem cauzal.

5.Definiţie

Fie $(H,\mathcal{P})$ un spaţiu Hilbert cu rezoluţie. Noţiunea duală cauzalităţii este anticauzalitatea. Un sistem $T \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte **anticauzal** în raport cu rezoluţia $\mathcal{P}$ (sau **operator supradiagonal**, **superior triunghiular**) dacă

adjunctul său, $T^\star$, este cauzal.
Un sistem care este şi cauzal şi anticauzal se numeşte sistem **fără memorie**. Notăm cu $\mathcal{C}(H)$ mulţimea sistemelor cauzale pe H, cu $\mathcal{AC}(H)$ mulţimea sistemelor anticauzale şi cu $\mathcal{M}(H)$ muţimea sistemelor fără memorie.
Analogul propoziţiei anterioare pentru sisteme anticauzale este:

6.Propoziţie
Fie $(H, \mathcal{P})$ un spaţiu Hilbert cu rezoluţie şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$; următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(i) T este anticauzal în raport cu rezoluţia $\mathcal{P}$.
(ii) $(I - P_t)T = (I - P_t)T(I - P_t)\,, \forall P_t \in \mathcal{P}$.
(iii) $TP_t = P_tTP_t\,, \forall P_t \in \mathcal{P}$.
(iv) Pentru orice $P_t \in \mathcal{P}$, subspaţiul $\mathrm{Im}(P_t)$ este subspaţiu invariant pentru operatorul T.
Demonstraţie Totul rezultă din echivalenţa (a se vedea propoziţia 5,cap.5): subspaţiul K este invariant la $T \Leftrightarrow$ subspaţiul $K^\perp$ este invariant la $T^\star$ şi din egalitatea (a se vedea propoziţia 6,cap.5):
$\mathrm{Ker}(T) = (\mathrm{Im}(T^\star))^\perp$.

7.Observaţie
Din propoziţiile 4 şi 6 rezultă că un sistem T este fără memorie dacă şi numai dacă pentru orice $P_t \in \mathcal{P}$, subspaţiile $\mathrm{Ker}(P_t)$ şi $\mathrm{Im}(P_t)$ sunt subspaţii reducătoare pentru T, sau, echivalent, orice proiector $P_t \in \mathcal{P}$ comută cu T, adică: $P_tT = TP_t$; (a se vedea propoziţia 15,cap.5).

8.Propoziţie
Fie $(H, \mathcal{P})$ un spaţiu Hilbert cu rezoluţie. Atunci mulţimile $\mathcal{C}(H)$ şi $\mathcal{AC}(H)$ sunt algebre Banach, iar $\mathcal{M}(H)$ este $C^\star$-algebră.
Demonstraţie Dacă T şi S sunt doi operatori cauzali, atunci orice combinaţie liniară a lor este de asemenea operator cauzal, deoarece, conform propoziţiei 4, pentru orice $\alpha, \beta \in C$ şi $P_t \in \mathcal{P}$, avem:

$$T(\mathrm{Ker}(P_t)) \subseteq \mathrm{Ker}(P_t) \text{ şi } S(\mathrm{Ker}(P_t)) \subseteq \mathrm{Ker}(P_t) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\alpha T + \beta S)(\mathrm{Ker}(P_t)) \subseteq \mathrm{Ker}(P_t).$$

Produsul: $TS(\mathrm{Ker}(P_t)) \subseteq \mathrm{Ker}(P_t)$. Pentru a demonstra completitudinea, fie T_n un şir de operatori cauzali care converge la T şi fie $x \in \mathrm{Ker}(P_t)$; atunci $P_tTx = \lim\limits_{n\to\infty} P_tT_nx = 0$, ceea ce arată că T este operator cauzal. Analog se demonstrează şi pentru operatorii anticauzali. În cazul operatorilor fără

memorie, trebuie să observăm în plus că adjunctul unui operator fără memorie este şi el fără memorie.

9.Exemple

(a) În continuare vom caracteriza operatorii cauzali pe C^n.
Fie $T \in \mathcal{L}(C^n)$ a cărui matrice în baza canonică este $A = (a_{ij})_{ij}$. Din propoziţia 6 rezultă că T este cauzal dacă şi numai dacă pentru orice $x \in C^n$ şi $k \in \{1, 2, .., n\}$ avem:

$$x(m) = 0 \text{ dacă } m \leq k \Rightarrow (Tx)(m) = 0 \text{ dacă } m \leq k.$$

Dar $(Tx)(m) = \sum_{k=1}^{n} a_{mk} x(k)$ şi deci obţinem:

$$T \text{ este cauzal } \Leftrightarrow a_{ij} = 0\,, \forall i < j.$$

Deci un sistem pe C^n este cauzal (în raport cu rezoluţia canonică asociată bazei canonice) dacă şi numai dacă matricea sa în baza canonică este inferior triunghiulară.
Deoarece adjunctul $T^\star$ are matricea $(\overline{a_{ji}})_{ij}$, rezultă că sistemul T este anticauzal dacă şi numai dacă matricea $(a_{ij})_{ij}$ este superior triunghiulară. Din cele două caracterizări rezultă că un sistem pe C^n este fără memorie dacă şi numai dacă matricea sa (în baza canonică) este o
matrice diagonală.
Să presupunem acum că operatorul T este cauzal şi inversabil. Deoarece inversa unei matrice inferior triunghiulare este tot inferior triunghiulară, rezultă că pe spaţii finit dimensionale inversul unui sistem cauzal şi inversabil este şi el cauzal. Aşa cum vom vedea în exemplele următoare, această proprietate nu mai este adevărată pe spaţii Hilbert infinit dimensionale.

(b) Fie acum spaţiul $\ell^2(Z)$ şi fie $(\sigma_n)_{n\in Z}$ baza canonică; (a se vedea exemplul 17(ii)). Fie $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ şi fie $(a_{ij})_{i,j\in Z}$ matricea sa (infinită), adică $a_{ij} =< T\sigma_j, \sigma_i >$. Printr-un raţionament similar cu cel din exemplul **(a)**, obţinem că T este cauzal dacă şi numai dacă
$a_{ij} = 0\,, \forall i < j\,, i, j \in Z$, adică matricea sa (în baza $(\sigma_n)_{n\in Z}$) este inferior triunghiulară. În particular, translaţia bilaterală W este sistem cauzal: matricea sa (în baza $(\sigma_n)_{n\in Z}$) este

$$a_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{dacă} \quad i = j + 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

Aşa cum am văzut în teorema 24,cap.5, W este unitar şi deci inversul său este egal cu adjunctul, care, conform definiţiei este anticauzal. Cum matricea

lui $W^\star$ este superior triunghiulară, rezultă că operatorul W este cauzal şi inversabil, dar inversul său nu este cauzal. În acest caz, operatorii fără memorie sunt operatorii diagonali (exemplul 1,cap.5).

(c) Să considerăm acum cazul particular al unui operator de convoluţie pe $\ell^2(Z)$, $C_\theta x = \theta \star x$, $\forall x \in \ell^2(Z)$, unde $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$, (a se vedea definiţia 38,cap.5). Deoarece matricea (infinită) a lui C_θ este $a_{ij} = \theta(i-j)$, rezultă că

$$C_\theta \text{ este cauzal dacă şi numai dacă } \theta(n) = 0,\ \forall n < 0.$$

O formulare echivalentă este următoarea:

Sistemul C_θ este cauzal dacă şi numai dacă funcţia (numită funcţia de transfer a sistemului), $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este esenţial mărginită şi analitică pe cerc, adică: $\mathcal{F}^{-1}\theta \in H^\infty(\mathcal{S}^1)$, (a se vedea exemplul 2(v),cap4); aceasta deoarece coeficienţii săi Fourier de indici negativi sunt nuli:
$\widehat{\mathcal{F}^{-1}}\theta(n) = \theta(n) = 0, \forall n < 0$.
Interpretând spaţiul $\ell^2(Z)$ ca **domeniul timp** şi $L^2(\mathcal{S}^1)$ ca **domeniul frecvenţă**, rezultă (pentru sisteme de convoluţie), dualitatea:
cauzalitate (în domeniul timp) $\leftrightarrow$**analicitate** (în domeniul frecvenţă). Dacă sistemul de convoluţie C_θ este şi inversabil, (ceea ce este echivalent cu $0 \notin$ essran$(\mathcal{F}^{-1}\theta)$: cf. corolarului 41(c),cap.5), atunci inversul său este cauzal dacă şi numai dacă funcţia $\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}$ este în subalgebra $H^\infty(\mathcal{S}^1)$. În concluzie, am obţinut:

Un sistem de convoluţie pe $\ell^2(Z)$ este **cauzal şi are un invers cauzal** dacă şi numai dacă $\mathcal{F}^{-1}\theta$ şi $\frac{1}{\mathcal{F}^{-1}\theta}$ sunt **analitice**, adică funcţia $\mathcal{F}^{-1}\theta$ este **funcţie exterioară** (”outer function”: [11],p.61).

(d) Caracterizăm acum operatorii integrali cauzali pe spaţiul $L^2(R)$. Fie deci (a se vedea definiţia 46,cap.5) $K : R^2 \to C$ o funcţie de pătrat integrabil şi $(T_K f)(x) = \int\limits_R K(x,y)f(y)dy$, $\forall f \in L^2(R)$. Din exemplul 2(d) şi din propoziţia 4 rezultă că T_K este cauzal dacă şi numai dacă pentru orice $t \in R$ şi pentru orice funcţie $f \in L^2(R)$ cu proprietatea $f(s) = 0$, $\forall s \leq t$ rezultă $(T_K f)(s) = 0$, $\forall s \leq t$. Fie $t \in R$ fixat şi fie $f \in L^2(R)$ astfel încât $f(s) = 0$, $\forall s \leq t$. Pentru orice $s < t$, avem:

$$(T_K f)(s) = \int_R K(s,x)f(x)dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{s} K(s,x)f(x)dx + \int_s^\infty K(s,x)f(x)dx = \int_s^\infty K(s,x)f(x)dx.$$

Rezultă deci că $(T_K f)(s) = 0$ dacă şi numai dacă

$$\int_s^\infty K(s,x)f(x)dx = 0.$$

Deoarece funcţia f este arbitrară pe intervalul (s, ∞), din egalitatea de mai sus rezultă $K(s,x) = 0$, $\forall s < x$, ceea ce încheie demonstraţia.
Pritr-un raţionament similar celui de mai sus, se poate demonstra că operatorul integral T_K este anticauzal dacă şi numai dacă nucleul K verifică egalitatea $K(x,y) = 0$, $\forall x > y$. În particular, rezultă că nu există operatori integrali (neidentic nuli) fără memorie pe $L^2(R)$.
O clasă de operatori fără memorie pe acest spaţiu este clasa operatorilor de multiplicare: pentru orice $\phi \in L^\infty(R)$, operatorul $M_\phi f = \phi f$,
$\forall f \in L^2(R)$ este fără memorie; lăsăm demonstraţia ca exerciţiu.

(e) În cazul particular al unui operator de convoluţie pe R, (a se vedea definiţia 43,cap.5), $(C_k f)(x) = \int\limits_R k(x-y)f(y)dy$, $\forall f \in L^2(R)$, din exemplul de mai sus rezultă că C_k este cauzal dacă şi numai dacă nucleul k are suportul inclus în $[0, \infty)$: $k(x) = 0$, $\forall x < 0$.

O altă proprietate remarcabilă pe care o pot avea sistemele liniare este invarianţa în timp. O definiţie generală (pe un spaţiu Hilbert abstract) a acestei noţiuni depăşeşte cadrul acestei lucrări; se pot consulta în această direcţie: [7],p.119; [17],p.55. Vom defini noţiunea de sistem invariant în timp pe spaţiile $\ell^2(Z)$ şi $L^2(R)$.

10.Definiţie
Fie W operatorul de translaţie bilateral pe spaţiul $\ell^2(Z)$, adică:
$(Wx)(n) = x(n-1)$, $\forall n \in Z$. Un sistem $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ se numeşte **invariant în timp** dacă $TW = WT$. Evident că un sistem invariant în timp comută cu orice putere a lui W: $TW^k = W^kT$, $\forall k \in Z$. Deoarece $W^k x = \sigma_k \star x$, rezultă că T este invariant în timp dacă şi numai dacă

$$\sigma_k \star (Tx) = T(\sigma_k \star x),\ \forall x \in \ell^2(Z),\ \forall k \in Z.$$

Invarianţa în timp pe $L^2(R)$ se defineşte după cum urmează. Fie, pentru orice $s \in R$ fixat, operatorul de translaţie

$$L_s : L^2(R) \to L^2(R),\ (L_s f)(t) = f(t-s).$$

Un sistem $T \in \mathcal{L}(L^2(R))$ se numeşte **invariant în timp** dacă şi numai dacă $TL_s = L_sT$, $\forall s \in R$.
Să observăm că în cele două definiţii date mai sus, avem de fiecare dată

un grup abelian $(G, +)$, $(G = Z$, respectiv $G = R)$, un spaţiu Hilbert H, $(H = \ell^2(Z)$ şi respectiv $H = L^2(R))$ şi o aplicaţie $\mathcal{R} : G \to \mathcal{L}(H)$, $(\mathcal{R}(k) = W^k$ şi respectiv $\mathcal{R}(s) = L_s)$ cu proprietăţile:
(i) $\mathcal{R}(0) = I$.
(ii) $\mathcal{R}(u + v) = \mathcal{R}(u)\mathcal{R}(v)$, $\forall u, v \in G$.
(iii) Operatorul $\mathcal{R}(u)$ este unitar pentru orice $u \in G$.
(iv) Aplicaţia $H \times G \ni (f, u) \to (\mathcal{R}(u)) f \in H$ este continuă.
O aplicaţie $\mathcal{R}$ cu proprietăţile de mai sus se numeşte **reprezentare continuă şi unitară** a grupului G pe spaţiul H.
În aceste condiţii, definiţia generală a sistemelor invariante în timp este: sistemul $T \in \mathcal{L}(H)$ se numeşte **invariant în timp** dacă
$\mathcal{R}(u)T = T\mathcal{R}(u)$, pentru orice $u \in G$; pentru completări, recomandăm [7]; [12]; [17].

11.Teoremă
Fie $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T este invariant în timp.
(b) T este operator de convoluţie, adică există $\theta : Z \to C$ astfel încât $Tx = C_\theta x = \theta \star x$, $\forall x \in \ell^2(Z)$.
Demonstraţie Implicaţia **(b)⇒(a)** este evidentă deoarece operatorii de convoluţie comută între ei.
Fie $T \in \mathcal{L}(\ell^2(Z))$ astfel încât $TW = WT$. Dacă $(a_{ij})_{i,j\in Z}$ este matricea lui T (în baza canonică, $\{\sigma_k\}_{k\in Z}$), atunci din egalitatea $TW = WT$, obţinem:

$$\sum_{k\in Z} a_{ik+1}x(k) = \sum_{k\in Z} a_{i-1k}x(k),\ \forall x \in \ell^2(Z),\ \forall i \in Z.$$

De aici rezultă imediat că $a_{ij} = a_{i+1j+1}$, $\forall i, j \in Z$; prin inducţie (sau folosind direct egalităţile $TW^k = W^kT$, $\forall k \in Z$), rezultă:

$$a_{ij} = a_{i-kj-k},\ \forall i, j, k \in Z.$$

În concluzie, matricea sistemului T este constantă de-a lungul diagonalelor paralele cu diagonala principală (matrice Toeplitz), adică există $\theta : Z \to C$ astfel încât $a_{ij} = \theta(i - j)$, $\forall i, j \in Z$, deci sistemul T este un sistem de convoluţie: $Tx = C_\theta x = \theta \star x$. Funcţia $\mathcal{F}^{-1}\theta \in L^\infty(\mathcal{S}^1)$ se numeşte **funcţia de transfer a sistemului**; ea are proprietatea:

$$\frac{\mathcal{F}^{-1}(Tx)}{\mathcal{F}^{-1}x} = \mathcal{F}^{-1}\theta,$$

deci raportul dintre transformata Fourier (inversă) a ieşirii şi transformata Fourier (inversă) a intrării este constant (nu depinde de intrarea x). În

general, pentru un sistem arbitrar, această proprietate constituie definiţia funcţiei de transfer a sistemului (dacă ea există).

Operatorii integrali invarianţi în timp pe $L^2(R)$ admit o caracterizare asemănătoare.

12.Propoziţie
Fie $K : R^2 \to C$ o funcţie de pătrat integrabil şi fie $T_K : L^2(R) \to L^2(R)$ operatorul integral asociat, adică: $(T_K f)(x) = \int\limits_R K(x,y)f(y)dy$.
Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
(a) T_K este invariant în timp.
(b) T_K este operator de convoluţie, adică există $k : R \to C$ astfel încât $K(x,y) = k(x-y)$, deci $T_K f = C_k f = k \star f$.
Lăsăm demonstraţia ca exerciţiu.
Reiese clar din exemplele prezentate că există o legătură profundă între noţiunea de sistem invariant în timp şi operaţia de convoluţie. Menţionăm de asemenea că noţiunea de sistem invariant în timp (şi legătura ei cu operaţia de convoluţie) se studiază şi pentru sisteme de tip distribuţie; recomandăm în acest sens [17],p.55.

6.2 Spaţiul stărilor

Intuitiv, starea (la momentul t) a unui sistem $T \in \mathcal{L}(H)$ este acea informaţie (eventual minimală) necesară pentru ca din cunoaşterea
valorilor intrării posterioare momentului t să putem deduce valorile ieşirii posterioare momentului t.

13.Definiţie
Fie $(H, \mathcal{P})$ un spaţiu Hilbert cu rezoluţie (cu notaţiile din definiţia 1) şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. O **descompunere în spaţii de stări** (state space decomposition) a sistemului T este orice familie de triplete
$\{(X_t, \lambda_t, \theta_t); t \in \mathcal{T}\}$ cu proprietăţile:
(i) X_t este spaţiu Hilbert, $\forall t \in \mathcal{T}$.
(ii) $\lambda_t : H \to X_t$ este un operator liniar şi continuu astfel încât $\lambda_t = \lambda_t P_t, \forall t \in \mathcal{T}$.
(iii) $\theta_t : X_t \to H$ este un operator liniar şi continuu astfel încât $\theta_t = (I - P_t)\theta_t, \forall t \in \mathcal{T}$.
(iv) $(I - P_t)TP_t = \theta_t \lambda_t$.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "(I-P_t)TP_t"] \arrow[dr, "\lambda_t"'] & & H \\
& X_t \arrow[ur, "\theta_t"'] &
\end{tikzcd}$$

În această definiţie, X_t se numeşte **spaţiul stărilor la momentul** t, λ_t este aplicaţia **intrare-stare**, iar θ_t aplicaţia **stare-ieşire**. Dacă $u \in H$ este o intrare arbitrară, atunci $x_t = \lambda_t u \in X_t$ se numeşte **starea sistemului** T **la momentul** t**, corespunzătoare intrării** u.
Să considerăm o intrare $u \in H$ şi fie $t \in \mathcal{T}$. Să calculăm valorile ieşirii Tu posterioare momentului t:

$$(I-P_t)Tu = (I-P_t)T[P_t + (I-P_t)]u =$$

$$= (I-P_t)TP_t u + (I-P_t)T(I-P_t)u = \theta_t\lambda_t u + (I-P_t)T(I-P_t)u =$$

$$= \theta_t x_t + (I-P_t)T(I-P_t)u.$$

De aici rezultă că, într-adevăr, cunoaşterea valorilor intrării posterioare momentului t (adică $(I-P_t)u$) şi a cuplului λ_t, θ_t (adică a stării la momentul t) permite cunoaşterea valorilor ieşirii posterioare momentului t.

14.Exemple

(i) Orice sistem $T \in \mathcal{L}(H)$ admite o descompunere "trivială" în spaţii de stări, considerând $X_t = H$, $\lambda_t = P_t$ şi $\theta_t = (I-P_t)T$, $\forall t \in \mathcal{T}$. Această descompunere nu este interesantă deoarece aici spaţiul stărilor (H) este prea mare. Aşa cum vom vedea în continuare, sunt interesante acele descompuneri în care spaţiul stărilor este "mic"; o situaţie tipică în acest sens este aceea când spaţiul stărilor X_t are dimensiune finită, (deşi H are dimensiune infinită).

(ii) Sistemul diferenţial (sistem dinamic liniar)
Fie matricele $A \in \mathcal{M}_n(R)$, $B \in \mathcal{M}_{n,1}(R), C \in \mathcal{M}_{1,n}(R)$ şi $D \in R$. În cele ce urmează, spaţiul Hilbert $L^2(0,1)$ este considerat cu rezoluţia canonică, $(P_t)_{t\in[0,1]}$.
Fie $u \in L^2(0,1)$ şi fie $x : [0,1] \to R^n$ soluţia problemei Cauchy

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t)\,,\; x(0) = 0.$$

Fie operatorul (numit **"sistem diferenţial"** sau **"sistem dinamic liniar"**)

$$\mathcal{D} : L^2(0,1) \to L^2(0,1),\ \mathcal{D}u = y, \text{unde}, y(t) = Cx(t) + Du(t), \forall t \in [0,1].$$

Din teoria ecuaţiilor diferenţiale rezultă ([1],p.276):

$$x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)ds, \forall t \in [0,1],$$

şi deci $y(t) = (\mathcal{D}u)(t) = \int\limits_0^t Ce^{A(t-s)}Bu(s)ds + Du(t), \forall t \in [0,1]$. Propunem ca exerciţiu verificarea faptului că $\mathcal{D}$ este un operator liniar şi continuu pe $L^2(0,1)$. Se poate arăta (prin translaţia $y - Du = v$) că proprietăţile sistemului $\mathcal{D}$ nu se schimbă dacă presupunem că $D = 0$; vom face de aici înainte această ipoteză.
Vom construi acum o descompunere (canonică) în spaţii de stări a sistemului $\mathcal{D}$.
Fie, pentru orice $t \in [0,1]$, $X_t = R^n$ şi fie aplicaţiile:

$$\lambda_t : L^2(0,1) \to R^n,\ \lambda_t u = x(t) = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)ds,$$

$$\theta_t : R^n \to L^2(0,1),\ (\theta_t \xi)(s) = \begin{cases} Ce^{A(s-t)}\xi, & \text{dacă} \quad s \geq t \\ 0, & \text{dacă} \quad s < t \end{cases}$$

Înainte de a demonstra că descompunerea de mai sus verifică definiţia 13, să observăm că în acest caz, spaţiul stărilor (R^n) este acelaşi la orice moment t şi este finit dimensional.
Pentru orice $t \in [0,1]$ şi $u \in L^2(0,1)$, avem:

$$\lambda_t u = \int_0^t e^{A(t-s)} Bu(s)ds = \int_0^t e^{A(t-s)} B(P_t u)(s)ds = \lambda_t P_t u.$$

$$(\theta_t \xi)(s) = \begin{cases} Ce^{A(s-t)}\xi, & \text{dacă} \quad s \geq t \\ 0, & \text{dacă} \quad s < t \end{cases} = [(I - P_t)\theta_t \xi](s).$$

Este clar că pentru orice $s < t$, avem:

$$[(I - P_t)TP_t u](s) = 0 = (\theta_t \lambda_t u)(s).$$

Fie acum $s \geq t$; avem:

$$[(I - P_t)TP_t u](s) = (TP_t u)(s) = \int_0^s Ce^{A(s-\tau)} BP_t u(\tau)d\tau =$$

$$= \int_0^t Ce^{A(s-\tau)} Bu(\tau)d\tau = Ce^{A(s-t)} \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau)d\tau = (\theta_t \lambda_t u)(s).$$

Vom nota (A, B, C) descompunerea (canonică) definită mai sus.

(iii) Sistemul dinamic liniar se poate defini şi pe spaţiul Hilbert $L^2(R)$. Pentru aceasta, fie matricele A, B, C ca în exemplul anterior; în plus, vom presupune că matricea A este **stabilă** , adică valorile proprii ale lui A sunt toate în semiplanul stâng: $\{z = a + ib \in C\,;\, a < 0\}$. Pentru orice $u \in L^2(R)$, considerăm sistemul diferenţial:

$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),$$

cu condiţia iniţială $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$. Atunci soluţia (unică) a problemei Cauchy de mai sus este:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Sistemul dinamic liniar pe R este operatorul

$$\mathcal{D} : L^2(R) \to L^2(R),\ \mathcal{D}u = Cx.$$

Pentru demonstraţii şi completări, recomandăm [12],p.42.
Descompunerea canonică este $\{(R^n, \lambda_t, \theta_t)\ ;\ t \in R\}$, unde:

$$\lambda_t : L^2 \to R^n,\ \lambda_t u = \int_{-\infty}^{\infty} e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau,$$

$$\theta_t : R^n \to L^2(R),\ (\theta_t \xi)(\tau) = \begin{cases} Ce^{A(t-\tau)}\xi, & \text{dacă} \quad \tau \geq t \\ 0, & \text{dacă} \quad \tau < t \end{cases}$$

Lăsăm ca exerciţiu demonstraţia.

(iv) Sistemul discret (sistem "diferenţă")
Analogul discret al exemplului anterior este definit după cum urmează. Fie matricele A, B, C ca mai sus şi fie $u \in \ell^2(N)$. Fie $x : N \to R^n$ soluţia recurenţei:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k),\ x(0) = 0.$$

Sistemul diferenţă este operatorul liniar şi continuu

$$\ell^2(N) \ni u \to y \in \ell^2(N),\ \text{unde}\,, y(k) = Cx(k), \forall k \in N.$$

Este uşor de demonstrat că

$$y(k) = Cx(k) = C \sum_{j=0}^{k-1} A^j Bu(k-1-j),\ \forall k \geq 1.$$

Spaţiul stărilor este $X_k = R^n$, $\forall k \in N$ şi:

$$\lambda_k : \ell^2(N) \to R^n,\ \lambda_k u = x(k),$$

$$\theta_k : R^n \to \ell^2(N),\ (\theta_k \xi)(j) = \begin{cases} CA^{j-k}\xi & j \geq k \\ 0 & j < k-1 \end{cases}$$

Lăsăm ca exerciţiu demonstraţia faptului că $(X_k, \lambda_k, \theta_k)_{k \in N}$ este o descompunere în sensul definiţiei 13, pe care o vom nota (A, B, C).

(v) În toate exemplele de până acum, spaţiul stărilor a fost acelaşi la fiecare moment: $X_t = R^n$, $\forall t$. Dăm în continuare un exemplu în care spaţiul stărilor este variabil în timp.
Pentru aceasta, vom face observaţia că pentru a defini o descompunere în spaţii de stări a unui sistem T, este suficient să definim operatorii $(I - P_t)TP_t$, $\forall t$; menţionăm că, în general, familia de operatori $\{(I - P_t)TP_t\,;\, t \in \mathcal{T}\}$ nu determină în mod unic sistemul T. Totuşi, în exemplul care urmează, sistemul T este unic determinat în acest mod; pentru demonstraţii şi completări, recomandăm [7],p.135.
Fie $H = \ell^2(N)$ cu rezoluţia canonică (cf. exemplului 2(c)) şi fie $\{\sigma_n\}_{n \in N}$ baza sa canonică. Fie:

$$(I - P_n)TP_n u = \sum_{k=0}^{n} < u, \sigma_k > \sigma_{n+1+k}.$$

Aşa cum am menţionat, familia $\{(I - P_n)TP_n\,;\, n \in N\}$ determină sistemul T. O descompunere în spaţii de stări pentru sistemul T se poate obţine după cum urmează; pentru orice n=0,1,2,..., definim:

$$\lambda_n : \ell^2(N) \to R^{n+1},\ \lambda_n u = (< u, \sigma_o >, < u, \sigma_1 >, .., < u, \sigma_n >)\,.$$

$$\theta_n : R^{n+1} \to \ell^2(N),\ \theta_n(x_o, x_1, .., x_n) = \sum_{k=0}^{n} x_k \sigma_{n+1+k}.$$

Se demonstrează fără dificultate că $\{R^{n+1}, \lambda_n, \theta_n;\, n \in N\}$ este o descompunere în spaţii de stări pentru T. Observăm că spaţiul stărilor este finit dimensional la orice moment, dar, dimensiunea sa creşte odată cu trecerea timpului: R, R^2, $R^3, ...$

15.Definiţie
Fie H un spaţiu Hilbert cu rezoluţie şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. O descompunere $\{X_t, \lambda_t, \theta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ se numeşte **complet controlabilă** dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, imaginea aplicaţiei λ_t este subspaţiu dens în X_t, adică $\forall t \in \mathcal{T}$, $\forall x \in X_t$ şi

$\forall \epsilon > 0$, $\exists u \in H$ astfel încât $\| \lambda_t u - x \| < \epsilon$.
Intuitiv, o descompunere este complet controlabilă dacă la orice moment, pentru orice stare dată, există o intrare care să aducă sistemul oricât de aprope de starea dată.
Descompunerea $\{X_t, \lambda_t, \theta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ se numeşte **complet observabilă** dacă toţi operatorii θ_t sunt mărginiţi inferior (a se vedea definiţia 13,cap.3), adică $\forall t \in \mathcal{T}$, $\exists \epsilon > 0$ astfel încât $\| \theta_t x \| \geq \epsilon \| x \|$, $\forall x \in X_t$.
Intuitiv, complet observabilitate înseamnă posibilitatea determinării stării la orice moment dat dacă se cunosc valorile intrărilor şi ieşirilor posterioare momentului dat.
O descompunere care este şi complet controlabilă şi complet observabilă se numeşte **descompunere minimală**.
Propunem ca exerciţiu faptul că descompunerea (variabilă în timp), construită în exemplul 14(v) este minimală. Pentru sistemul dinamic liniar, vom demonstra mai întâi un criteriu de minimalitate pentru descompunerea sa canonică.
Un punct forte al modelului matematic prezentat aici pentru noţiunea de stare este şi următoarea teoremă de existenţă a descompunerilor minimale pentru un sistem arbitrar.

16.Teoremă
Fie H un spaţiu Hilbert cu rezoluţie şi fie $T \in \mathcal{L}(H)$. Atunci T admite o descompunere minimală.
Demonstraţie Construim mai întâi spaţiul stărilor la un moment dat. Fie deci $t \in \mathcal{T}$ fixat; definim pe spaţiul $P_t(H)$ relaţia de echivalenţă:

$$x \sim_t y \Leftrightarrow (I - P_t)TP_t x = (I - P_t)TP_t y, \ \forall x, y \in P_t(H).$$

Mulţimea claselor de echivalenţă,

$$\widehat{P_t(H)} = \{[x]_t \ ; \ x \in P_t(H)\}$$

este spaţiu vectorial cu operaţiile uzuale:

$$[x]_t + [y]_t = [x + y]_t \text{ şi } \alpha[x]_t = [\alpha x]_t, \ \forall x, y \in P_t(H), \ \forall \alpha \in C.$$

Se demonstrează de asemenea că aplicaţia:

$$< [x]_t, [y]_t >_t = < (I - P_t)TP_t x, (I - P_t)TP_t y >,$$

este un produs scalar pe $\widehat{P_t(H)}$, care se organizează astfel ca un spaţiu prehilbertian. Definim spaţiul stărilor la momentul t, X_t, ca fiind completatul

(închiderea) acestui spaţiu prehilbertian.
Definim acum operatorii λ_t şi θ_t.

$$\lambda_t : H \to X_t,\ \lambda_t x = [P_t x]_t.$$

Operatorul θ_t este definit iniţial pe subspaţiul (dens) $\widehat{P_t(H)}$ prin formula:

$$\theta_t[x]_t = (I - P_t)TP_t x.$$

Demonstrăm acum că θ_t este continuu, şi deci el poate fi prelungit prin continuitate la întreg spaţiul X_t:

$$\| \theta_t[x]_t \|^2 = \| (I - P_t)TP_t x \|^2 = < (I - P_t)TP_t x, (I - P_t)TP_t x > = \| [x]_t \|,$$

ultima normă fiind norma din X_t. Din relaţia de mai sus rezultă că operatorul θ_t este o izometrie şi deci, în mod evident, el este şi mărginit inferior. Demonstrăm acum că λ_t este continuu:

$$\| \lambda_t x \| = \| \theta_t \lambda_t x \| = \| (I - P_t)TP_t x \| \leq \| T \| \| x \|,\ \forall x \in H.$$

Se verifică prin calcul direct egalităţile:

$$\lambda_t = \lambda_t P_t,\ \theta_t = (I - P_t)\theta_t \text{ şi } (I - P_t)TP_t = \theta_t \lambda_t.$$

Demonstrăm acum că descompunerea este minimală. Complet observabilitatea a fost deja demonstrată, deoarece θ_t este mărginit inferior. Pe de altă parte, din definiţie, λ_t are imagine densă în X_t, deci descompunerea este şi complet controlabilă.

17.Teoremă (Criteriile generale de controlabilitate şi observabilitate)
Fie H un spaţiu Hilbert cu rezoluţie, fie $T \in \mathcal{L}(H)$ şi fie $\{X_t, \lambda_t, \theta_t\}_{t \in \mathcal{T}}$ o descompunere a sa.

(i) Descompunerea este complet controlabilă dacă şi numai dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, avem:

$$< \lambda_t \lambda_t^\star x, x > > 0,\ \forall x \in X_t,\ x \neq 0.$$

(ii) Descompunerea este complet observabilă dacă şi numai dacă pentru orice $t \in \mathcal{T}$, avem:

$$< \theta_t^\star \theta_t u, u > > 0,\ \forall u \in H,\ u \neq 0.$$

Demonstraţie (i) Dacă descompunerea este complet controlabilă, atunci, din definiţie, rezultă că operatorii λ_t au imagine densă. Din propoziţia

29,cap.3, rezultă că $\lambda_t^\star$ este injectiv, $\forall t \in \mathcal{T}$ şi deci pentru orice $x \in H$, $x \neq 0$, avem:

$$< \lambda_t \lambda_t^\star x, x >=< \lambda_t^\star x, \lambda_t^\star x >=\| \lambda_t^\star x \|^2 > 0.$$

Reciproc, dacă $\lambda_t \lambda_t^\star > 0$, atunci $\lambda_t^\star$ este injectiv şi deci, din propoziţia 29,cap.3, rezultă că λ_t are imagine densă.
(ii) Raţionamentul este asemănător cu cel de mai sus.

Încheiem acest paragraf cu unele particularizări şi exemplificări ale noţiunilor şi rezultatelor de până acum.

Un caz particular remarcabil se obţine aplicând criteriul general de controlabilitate şi observabilitate sistemului diferenţial.

18.Propoziţie (Criteriile lui Kalman de observabilitate şi controlabilitate pentru sistemul diferenţial)
Fie $\mathcal{D}$ sistemul diferenţial din exemplul 14(ii) şi fie (A, B, C) descompunerea sa canonică.

(i) Descompunerea (A, B, C) este complet observabilă dacă şi numai dacă următoarea matrice (”de observabilitate”) are rang maxim:

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} C \\ ... \\ CA \\ ... \\ CA^2 \\ ... \\ \vdots \\ ... \\ CA^{n-1} \end{pmatrix}$$

(ii) Descompunerea (A, B, C) este complet controlabilă dacă şi numai dacă următoarea matrice (”de controlabilitate”) are rang maxim:

$$\mathcal{R} = \left(B \vdots BA \vdots BA^2 \vdots ... \vdots BA^{n-1} \right)$$

Demonstraţie (i) Conform teoremei precedente, descompunerea este complet observabilă dacă şi numai dacă $\theta_t^\star \theta_t > 0$, $\forall t \in [0, 1]$, unde, θ_t a fost definit în exemplul 14(ii):

$$\theta_t : R^n \to L^2(0, 1),\ (\theta_t \xi)(s) = \begin{cases} Ce^{A(s-t)}\xi, & \text{dacă} \quad s \geq t \\ 0, & \text{dacă} \quad s < t \end{cases}$$

Calculăm acum adjunctul lui θ_t. Reamintim că dacă ξ şi η sunt doi vectori (coloane) din R^n, atunci produsul lor scalar este $\xi^T\eta$, unde, ξ^T este transpusul lui ξ.
Pentru orice $\xi \in R^n$ şi $f \in L^2(0,1)$, avem:

$$< f, \theta_t\xi >_{L^2} = \int_t^1 f(s)Ce^{A(s-t)}\xi ds = \left[\int_t^1 f(s)Ce^{A(s-t)}ds\right]^T \xi =$$

$$= \left[\int_t^1 e^{A(s-t)}C^T f(s)ds\right]^T \xi = < \theta_t^\star f, \xi >_{R^n} .$$

Rezultă deci că pentru orice $t \in [0,1]$, avem:

$$\theta_t^\star f = \int_t^1 e^{A^T(s-t)}C^T f(s)ds, \ \forall f \in L^2(0,1).$$

În concluzie, operatorul $\theta_t^\star\theta_t : R^n \to R^n$ este:

$$\theta_t^\star\theta_t\xi = \left[\int_t^1 e^{A^T(s-t)}C^T Ce^{A(s-t)}ds\right]\xi.$$

Deci $\theta_t^\star\theta_t > 0$ dacă şi numai dacă matricea

$$\int_t^1 e^{A^T(s-t)}C^T Ce^{A(s-t)}ds$$

este strict pozitiv definită, sau, echivalent, dacă

$$0 < < \xi, \theta_t^\star\theta_t\xi > = \int_t^1 \left[Ce^{A(s-t)}\xi\right]^T \left[Ce^{A(s-t)}\xi\right] ds, \ \forall \xi \in R^n, \xi \neq 0.$$

Rezultă deci că descompunerea nu este complet observabilă dacă şi numai dacă există $\xi \neq 0$ astfel încât

$$Ce^{A(s-t)}\xi = 0, \ \forall s \in [t,1],$$

sau, echivalent

$$Ce^{tA}\xi = 0, \ \forall t \in [0,1].$$

Dezvoltând e^{tA} în serie Taylor, relaţia de mai sus devine:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{CA^j\xi t^j}{j!} = 0, \ \forall t \in [0,1].$$

Din teorema de unicitate a dezvoltării în serie de puteri ([8],p.121), rezultă:

$$CA^j\xi = 0, \ \forall j \in N.$$

Deoarece puterile A^j, $\forall j \geq n$ se pot exprima în funcţie de puterile A^j, $0 \leq j \leq n-1$, (consecinţă a teoremei Hamilton-Cayley), este suficient să avem:

$$CA^j\xi = 0,\ \forall j \in \{0, 1, 2, .., n-1\}.$$

În concluzie, descompunerea este complet observabilă dacă şi numai dacă sistemul liniar şi omogen $\mathcal{Q}\xi = 0$ (cf. notaţiei din enunţ) are numai soluţia banală, adică matricea $\mathcal{Q}$ are rang maxim.

(ii) Raţionamentul este analog celui precedent; calculăm mai întâi operatorul $\lambda_t^\star : R^n \to L^2(0,1)$, pentru care obţinem:

$$(\lambda_t^\star \xi)(s) = \begin{cases} B^T e^{A^T(t-s)} & \text{dacă} \quad s \leq t \\ 0 & \text{dacă} \quad s > t \end{cases}$$

Rezultă deci că matricea (în baza canonică) a operatorului $\lambda_t \lambda_t^\star$ este:

$$\int_0^t e^{A(t-s)} B B^T e^{A^T(t-s)} ds.$$

Repetând raţionamentul de la punctul **(i)**, demonstraţia se încheie.

19.Observaţie

Pentru sistemul dinamic liniar pe $L^2(R)$ şi pentru sistemul discret din exemplul 14(iii) şi (iv) se poate enunţa şi demonstra un rezultat analog celui anterior; lăsăm acest fapt ca exerciţiu.

20.Definiţie

Sistemul diferenţial $\mathcal{D}$ admite următoarea generalizare vectorială.
Fie $m \in N$ şi fie

$$L^2([0,1], R^m) = \left\{ u : [0,1] \to R^m \,;\, u \,\text{măsurabilă şi} \int_0^1 \| u(t) \|^2 \, dt \, < \, \infty \right\}.$$

În definiţia de mai sus $\| \ \|$ este norma euclidiană din R^m. Cu operaţiile uzuale de adunare şi înmulţire cu scalari, $L^2([0,1], R^m)$ este spaţiu vectorial; se demonstrează că aplicaţia:

$$< u, v > = \int_0^1 < u(t), v(t) > dt$$

determină pe $L^2([0,1], R^m)$ o structură de spaţiu Hilbert; demonstraţiile acestor afirmaţii sunt adaptări ale celor din cazul scalar (m=1).
Fie $n, p \in N$ şi fie $A \in \mathcal{M}_{n,n}(R)$, $B \in \mathcal{M}_{n,m}(R)$, $C \in \mathcal{M}_{p,n}(R)$. Pentru orice $u \in L^2([0,1], R^m)$, fie $x : [0,1] \to R^n$ soluţia problemei Cauchy:

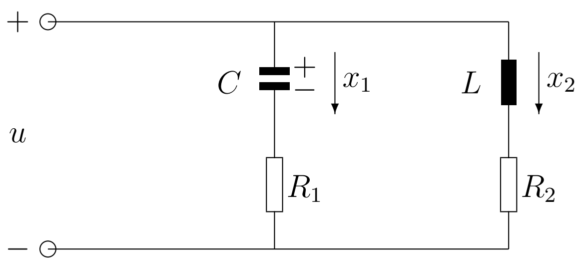
$$x'(t) = Ax(t) + Bu(t),\ \forall t \in [0,1] \ ;\ x(0) = 0.$$

Sistemul diferenţial (cazul vectorial) este aplicaţia

$$\mathcal{D} : L^2([0,1], R^m) \to L^2([0,1], R^p),\ \mathcal{D}u = y,\ \text{unde},\ y(t) = Cx(t).$$

Rezultatele demonstrate pentru cazul scalar sunt adevărate şi pentru cazul vectorial, cu adaptările corespunzătoare (care sunt evidente). Să mai observăm că în cazul vectorial matricele de observabilitate, $\mathcal{Q}$, şi controlabilitate, $\mathcal{R}$, nu mai sunt pătratice, însă criteriile lui Kalman se enunţă la fel ca în cazul scalar (rang maxim).
Propunem ca exerciţiu definirea sistemului discret vectorial, a sistemului dinamic liniar vectorial pe $L^2(R)$ şi a variantei vectoriale a sistemului din exemplul 14(v).
Sistemele în care intrările şi ieşirile sunt funcţii cu valori vectoriale se numesc sisteme MIMO (Multi Input, Multi Output), iar cele în care intrările şi ieşirile iau valori scalare se numesc SISO (Single Input, Single Output).

21.Exemple ([18],p.125)
(i) Fie R_1, R_2, C, L nenule şi să considerăm reţeaua electrică din figura alăturată.



Notăm cu u tensiunea la borne şi cu i curentul. Vom considera sistemul (intrare-ieşire) $u \to i$. Mai întâi, vom reprezenta acest sistem ca un sistem dinamic şi apoi vom studia, folosind criteriile lui Kalman, observabilitatea şi controlabilitatea reprezentării obţinute.
Pentru aceasta, fie x_1 tensiunea pe condensatorul C şi x_2 curentul prin inductorul L.

Ecuaţiile (diferenţiale) ale reţelei sunt:

$$x_1' = -\frac{1}{R_1C}x_1 + \frac{1}{R_1C}u,$$

$$x_2' = -\frac{R_2}{L}x_2 + \frac{1}{L}u.$$

Curentul i este dat de formula:

$$i = -\frac{1}{R_1}x_1 + x_2 + \frac{1}{R_1}u.$$

Fie matricele:

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1C} & 0 \\ & \\ 0 & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix} \ , \ B = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C} \\ \\ \frac{1}{L} \end{pmatrix} \ , \ C = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & 1 \end{pmatrix} \ , \ D = \frac{1}{R_1}$$

Notând $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, sistemul $u \to i$ se scrie:

$$x' = Ax + Bu \ , \ i = Cx + Du.$$

Pentru a decide dacă descompunerea canonică (A, B, C) este observabilă şi (sau) controlabilă, calculăm matricele de observabilitate şi controlabilitate; obţinem:

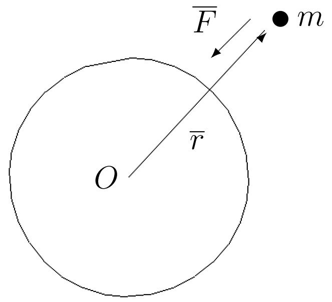
$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R_1C} & -\frac{1}{R_1^2C^2} \\ & \\ \frac{1}{L} & -\frac{R_2}{L^2} \end{pmatrix} \text{ şi } \mathcal{R} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{R_1} & \frac{!}{R_1^2C} \\ & \\ 1 & -\frac{R_2}{L} \end{pmatrix}.$$

Determinanţii acestor matrice sunt:

$$\det \mathcal{Q} = \frac{L - R_1R_2C}{R_1^2C^2L^2} \text{ şi } \det \mathcal{R} = \frac{R_1R_2C - L}{R_1^2CL},$$

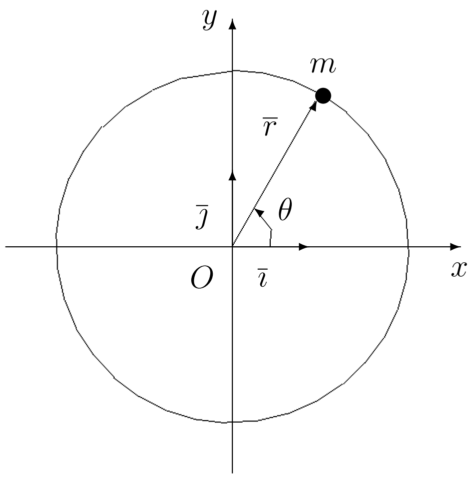
şi deci în acest caz condiţia de observabilitate coincide cu cea de controlabilitate şi este: $L \neq R_1R_2C$.

(ii) Problema satelitului
Considerăm m un punct material (satelitul) care se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale $\overline{F}$ (forţa de atracţie a Pământului).



Dacă $\overline{r}(t)$ este vectorul de poziţie al satelitului faţă de centrul O al Pământului la momentul t, atunci ecuaţia mişcării este $m\overline{r}''(t) = \overline{F}$. Din legea atracţiei universale, rezultă că există o constantă $k > 0$ astfel încât: $\overline{F} = -k \parallel \overline{r} \parallel^{-3} \overline{r}$. Demonstrăm acum că mişcarea este plană; pentru aceasta, este suficient să demonstrăm că produsul vectorial $\overline{r} \times \overline{r}'$ este egal cu un vector constant $\overline{v}$, (deci vectorul de poziţie $\overline{r}$ aparţine planului perpendicular pe vectorul $\overline{v}$). Într-adevăr, avem:

$$\frac{d}{dt}(\overline{r} \times \overline{r}') = \overline{r}' \times \overline{r}' + \overline{r} \times \overline{r}'' = \overline{r} \times \frac{1}{m}\overline{F} = -\frac{k}{m \parallel \overline{r} \parallel^3}(\overline{r} \times \overline{r}) = \overline{0}.$$



Considerăm, în planul xOy al mişcării, o bază ortononormală, $\{\overline{\imath}, \overline{\jmath}\}$; fie $r = r(t) = \parallel \overline{r} \parallel$ şi $\theta = \theta(t)$ coordonatele polare ale satelitului. Prin calcul direct, obţinem:

$$\overline{r} = r\cos\theta\overline{\imath} + r\sin\theta\overline{\jmath},$$

$$\overline{r}' = (r'\cos\theta - r\theta'\sin\theta)\,\overline{\imath} + (r'\sin\theta + r\theta'\cos\theta)\,\overline{\jmath},$$

$$\overline{r}'' = \left(r''\cos\theta - 2r'\theta'\sin\theta - r\,(\theta')^2\cos\theta - r\theta''\sin\theta\right)\overline{\imath} +$$

$$+\left(r''\sin\theta + 2r'\theta'\cos\theta - r\,(\theta'')^2\sin\theta + r\theta''\cos\theta\right)\overline{\jmath}.$$

Înlocuind în expresia lui $\overline{F}$, obţinem:

$$\overline{F} = -\frac{k}{r^3}\left(r\cos\theta\overline{\imath} + r\sin\theta\overline{\jmath}\right).$$

Înlocuind acum în ecuaţia de mişcare $m\overline{r}'' = \overline{F}$ pe $\overline{r}''$ şi $\overline{F}$ cu expresiile obţinute mai sus, obţinem relaţiile (scalare):

$$\begin{aligned} r''(t) &= r(t)\left(\theta'\right)^2(t) - \frac{k}{\left(r(t)\right)^2} \\ \theta''(t) &= -\frac{2r'(t)}{r(t)}\theta(t) \end{aligned}$$

Comenzile cu ajutorul cărora este controlată poziţia satelitului pe orbită sunt u_1 =comanda (acceleraţia) radială şi u_2 = comanda (acceleraţia) tangenţială. Rezultă deci că ecuaţiile de mişcare sunt:

$$\begin{aligned} r'' &= r\left(\theta'\right)^2 - \frac{k}{r^2} + u_1 \\ \theta'' &= -\frac{2r'\theta'}{r} + u_2 \end{aligned}$$

O soluţie particulară a acestui sistem este:

$$r(t) = c\,,\ \theta(t) = \omega t,$$

unde, c şi ω sunt două constante ce verifică relaţia $c^3\omega^2 = k$. Se observă (din prima egalitate) că traiectoria este circulară, iar viteza unghiulară a satelitului, θ', este constantă.
Pentru a studia controlabilitatea şi observabilitatea sistemului

$$(u_1, u_2) \to (r, \theta),$$

introducem vectorul de stare (la momentul t), $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in R^4$, definit prin egalităţile:

$$x_1(t) = r(t) - c\,,\ x_2(t) = r'(t)\,,\ x_3(t) = c(\theta(t) - \omega t)\,,\ x_4(t) = c(\theta'(t) - \omega).$$

Deducem acum ecuaţiile de mişcare (în spaţiul stărilor):

$$\begin{aligned} x_1' &= r' = x_2 \\ x_2' &= r'' = r\left(\theta'\right)^2 + \frac{k}{r^2} + u_1 = (x_1 + c)\left(\frac{x_4}{c} + \omega\right)^2 + \frac{k}{(x_1+c)^2} + u_1 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= c\,\theta'' = c\left(-\frac{2r'\theta'}{r} + u_2\right) = -c\frac{2}{x_1 + c}\,x_2\left(\frac{x_4}{c} + \omega\right) + cu_2 \end{aligned}$$

Sistemul diferenţial obţinut (în necunoscutele x_1, x_2, x_3, x_4) este neliniar; pentru a-l putea studia, liniarizăm ecuaţiile (dezvoltând în serie Taylor în jurul originii membrul drept al fiecărei ecuaţii şi păstrând termenii de gradul întâi):

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= 3\omega^2 x_1 + 2\omega x_4 + u_1 \\ x_3' &= x_4 \\ x_4' &= -2\omega x_2 + u_2 \end{aligned}$$

Fie matricele

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3\,\omega^2 & 0 & 0 & 2\,\omega \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2\,\omega & 0 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Fie $y_1(t) = r(t) - t = x_1(t)$ şi $y_2(t) = c(\theta(t) - \omega\, t) = x_3(t)$.
Atunci sistemul $u = (u_1, u_2) \to (y_1, y_2 = y$ se scrie sub forma sistemului dinamic:

$$x' = Ax + Bu\ ,\ y = Cx.$$

Pentru a studia controlabilitatea şi observabilitatea sistemului, calculăm matricele de controlabilitate şi observabilitate:

$$\mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\,\omega & -\omega^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2\,\omega & -\omega^2 & 0 & 0 & -2\,\omega^3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2\,\omega & 0 & 0 & -4\,\omega^2 \\ 0 & 1 & -2\,\omega & 0 & 0 & -4\,\omega^2 & 2\,\omega^3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3\,\omega^2 & 0 & 0 & -6\,\omega^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2\,\omega & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2\,\omega & 0 & 0 & -4\,\omega^2 \end{pmatrix}$$

Rangurile matricelor $\mathcal{R}$ şi $\mathcal{Q}$ sunt amândouă 4 şi deci sistemul este şi controlabil şi observabil (în ipoteza că amândouă comenzile u_1 şi u_2 sunt accesibile şi, respectiv, se cunosc amândouă ieşirile y_1 şi y_2).
Să presupunem acum că una din cele două comenzi lipseşte.
Dacă $u_1 = 0$, (adică lipseşte comanda radială), atunci:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2\,\omega & 0 \\ 0 & 2\,\omega & 0 & -2\,\omega^3 \\ 0 & 1 & 0 & -4\,\omega^2 \\ 1 & 0 & -4\,\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Se observă că şi în acest caz rangul matricei $\mathcal{R}$ este 4, deci mişcarea satelitului poate fi controlată numai prin comandă tangenţială.
Dacă $u_2 = 0$, (deci lipseşte comanda tangenţială), atunci:

$$B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathcal{R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -\omega^2 \\ 1 & 0 & -\omega^2 & 0 \\ 0 & 0 & -2\,\omega & 0 \\ 0 & -2\,\omega & 0 & 2\,\omega^3 \end{pmatrix}$$

În acest caz, rangul matricei $\mathcal{R}$ este 3, deci satelitul nu poate fi controlat numai prin comandă radială.
Lăsăm ca exerciţiu următoarele afirmaţii:
Dacă se cunoaşte numai y_1, atunci satelitul nu este observabil (radial).
Dacă se cunoaşte numai y_2, atunci satelitul este observabil (tangenţial).

Bibliografie

1. Brânzănescu V., Stănăşilă O.
"Matematici speciale", Editura All, Bucureşti,1994.
2. Brezis H.
"Analyse fonctionnelle", Masson, Paris, 1992.
3. Colojoară I.
"Analiză matematică", Bucureşti, Ed. didactică şi pedagogică,1983.
4. Cristescu R.
"Analiză funcţională", Bucureşti, Ed. didactică şi pedagogică,1979.
5. Douglas R.G.
"Banach algebra techniques in operator theory", Acad.Press,1972.
6. Dunford N., Schwartz J.T.
"Linear operators", Interscience Publ.,Part I,1958;Part II,1963.
7. Feintuch A., Saeks R.
"System theory; a Hilbert space approach", Acad.Press,1982.
8. Flondor P., Stănăşilă O.
"Lecţii de analiză matematică", Editura All, Bucureşti,1993.
9. Halmos P.R.
"Finite-dimensional vector spaces", Springer-Verlag, N.Y. Inc.,1974.
10. Halmos P.R.
"A Hilbert space problem book", Springer-Verlag, N. Y. Inc.,1970.
11. Hoffman K.
"Banach spaces of analytic functions", Prentice-Hall, Inc.,1962.
12. Ionescu V., Varga A.
"Teoria sistemelor", Editura All, Bucureşti,1994.
13. Rudin W.
"Real and complex analysis", McGraw-Hill,1962.
14. Rudin W.
"Principles of mathematical analysis", McGraw-Hill,1964.
15. Rudin W.
"Fourier analysis on groups", Interscience Publishers,1962.
16. Sireţchi Gh.

"Spaţii concrete în analiza funcţională", Univ. Buc., 1982.
17. Stanomir D., Stănăşilă O.
"Metode matematice în teoria semnalelor", Ed. teh., Bucureşti,1980.
18. Şabac Gh., Stănăşilă O., Cocârlan P., Topală A.
"Matematici speciale", Ed. didactică şi pedagogică, Bucureşti,1983.
19. Şabac M.
"Lecţii de analiză reală, Universitatea Bucureşti,1982.
20. Vasilescu F.H.
"Iniţiere în teoria operatorilor liniari", Ed. tehnică, Bucureşti,1987.